

# mp\* 16-17 : révisions pour l'écrit - Algèbre linéaire, réduction - corrigés

**Exercice 1 (Noyaux itérés).** Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace de dimension finie  $n$  non nulle. On définit, pour tout entier naturel  $p$  :

$$F_p = \ker(f^p) \quad \text{et} \quad G_p = \text{Im}(f^p)$$

( $f^p$  désigne l'itérée d'ordre  $p$  de  $f$  :  $f^0 = \text{Id}$  et,  $f^{p+1} = f \circ f^p$ ).

1. Démontrer que, des deux suites de s.e.v.  $(F_p)$  et  $(G_p)$ , l'une est croissante et l'autre décroissante (pour l'inclusion).
2. Démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel  $r$  tel que  $F_r = F_{r+1}$ , et démontrer qu'alors, pour tout entier naturel  $p$  supérieur ou égal à  $r$ ,  $F_p = F_{p+1}$ .
3. Démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel  $s$  tel que  $G_s = G_{s+1}$ , et démontrer qu'alors, pour tout entier naturel  $p$  supérieur ou égal à  $s$ ,  $G_p = G_{p+1}$ . Y-a-t-il un lien entre  $r$  et  $s$ ?
4. Démontrer que  $G_s$  et  $F_r$  sont supplémentaires dans  $E$ .

---

1. Si  $f^p(x) = 0_E$ ,  $f(f^p(x)) = 0_E$ , i.e.  $f^{p+1}(x) = 0_E$ . On a donc

$$x \in F_p \implies x \in F_{p+1}$$

Ou encore  $F_p \subset F_{p+1}$ .

De plus, si  $y \in G_{p+1}$ , il existe  $x$  tel que  $y = f^{p+1}(x)$ . Mais alors  $y = f^p(f(x))$ , donc  $y \in G_p$ . Et finalement  $G_{p+1} \subset G_p$ .

2. On est en dimension finie ; la suite des dimensions des  $F_p$ , croissante et majorée, converge. Mais c'est une suite d'entiers naturels. Elle est donc stationnaire. Il existe donc  $p$  tel que  $F_p = F_{p+1}$  (si un sev est inclus dans un autre et s'ils ont même dimension, ils sont égaux). C'est même toujours vrai à partir d'un certain rang. Mais peu importe, il suffit pour l'instant de considérer

$$r = \min(\{p ; F_p = F_{p+1}\})$$

Montrons maintenant que

$$F_p = F_{p+1} \implies F_{p+1} = F_{p+2}$$

Supposons, donc,  $F_p = F_{p+1}$ . On sait déjà que  $F_{p+1} \subset F_{p+2}$ , il s'agit donc de montrer l'inclusion inverse. Considérons  $x \in F_{p+2}$ . Comme on a envie d'utiliser l'hypothèse qui est  $F_{p+1} \subset F_p$ , il est naturel de chercher à faire apparaître un élément de  $F_{p+1}$ . Or le fait que  $f^{p+2}(x) = 0_E$  s'écrit aussi bien  $f^{p+1}(f(x)) = 0_E$ , donc  $f(x) \in F_{p+1}$ . De cela on déduit que  $f(x) \in F_p$ , c'est-à-dire que  $x \in F_{p+1}$ . On a donc bien montré ce qu'on voulait et, par récurrence, le résultat demandé s'ensuit.

3. On peut faire le même genre de raisonnement qu'à la question précédente, mais il est plus simple de se souvenir du théorème du rang. En effet, comme pour tout  $p$  on a  $G_{p+1} \subset G_p$ , on a

$$G_p = G_{p+1} \iff \dim(G_p) = \dim(G_{p+1})$$

Mais du théorème du rang on déduit facilement que

$$(\dim(G_p) = \dim(G_{p+1})) \iff (\dim(F_p) = \dim(F_{p+1}))$$

et on est ramené à utiliser les résultats de la question précédente. On trouve  $r = s$ .

4. Comme  $r = s$ , le théorème du rang fait qu'il nous suffit de montrer que

$$F_r \cap G_r = \{0_E\}$$

Mais si  $x \in F_r \cap G_r$ , soit  $y$  tel que  $x = f^r(y)$ ; de  $f^r(x) = 0_E$  on déduit que  $f^{2r}(y) = 0_E$ . Donc  $y \in F_{2r}$ . Mais  $F_{2r} = F_r$  d'après 2. Donc  $y \in F_r$ , donc  $x = 0_E$ , ce qui conclut.

5. On a  $H_{k+1} \cap F_{k+1} = \{0_E\}$ , donc, comme  $F_1 \subset F_{k+1}$ ,  $H_{k+1} \cap F_1 = \{0_E\}$ . Ce qui montre que la restriction de  $f$  à  $H_{k+1}$  est injective (on constate bien simplement que d'une manière générale, si  $H$  est un sev de  $E$ ,  $f$  une application linéaire définie sur  $E$ ,

$$\text{Ker}(f_H) = \text{Ker}(f) \cap H .$$

De plus,  $H_{k+1} \subset F_{k+2}$ , donc  $f(H_{k+1}) \subset f(F_{k+2})$ . Mais  $f(F_{k+2}) \subset F_{k+1}$ . En effet, si  $f^{k+2}(x) = 0_E$ , on a  $f^{k+1}(f(x)) = 0_E$ . Donc  $f(H_{k+1})$  est un sev de  $F_{k+1}$ .

Soit  $x \in f(H_{k+1}) \cap F_k$ . Il existe  $y$  tel que  $x = f(y)$  et  $y \in H_{k+1}$ . De plus,  $f^k(x) = 0_E$ , donc  $f^{k+1}(y) = 0_E$ . Donc  $y \in H_{k+1} \cap F_{k+1}$ . Donc  $y = 0_E$ , et finalement  $x = 0_E$ .

De

$$f(H_{k+1}) \oplus F_k \subset F_{k+1}$$

on déduit que

$$\dim(f(H_{k+1})) + \dim(F_k) \leq \dim(F_{k+1})$$

Mais d'autre part,  $f$  induit un isomorphisme de  $H_{k+1}$  sur son image, donc

$$\dim(f(H_{k+1})) = \dim(H_{k+1}) = \alpha_{k+2} - \alpha_{k+1}$$

Ce qui apporte la conclusion. Quand on monte l'escalier des dimensions des noyaux itérés, les marches sont de moins en moins hautes.

---

**Exercice 2 (Utilisation de propriétés polynomiales du déterminant).**

Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant : Si deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  sont semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , elles le sont aussi dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ .

Pour cela, on considère une matrice  $P$  de  $\mathcal{GL}_n(\mathbf{C})$  telle que  $B = P^{-1}AP$ , condition que l'on écrira  $PB = AP$ . On note alors  $P_1$  la matrice dont les coefficients sont les parties réelles de ceux de  $P$ ,  $P_2$  la matrice dont les coefficients sont les parties imaginaires de ceux de  $P$ .

1. Démontrer que  $P_1B = AP_1$  et  $P_2B = AP_2$ .
  2. Démontrer que l'application  $x \mapsto \det(P_1 + xP_2)$  n'est pas constamment nulle sur  $\mathbf{R}$ , et en déduire le résultat.
- 

1. On a facilement  $P = P_1 + iP_2$ , et  $PB = AP$ , d'où l'on tire  $P_1B - AP_1 = i(AP_2 - P_2B)$ . Le premier membre est une matrice à coefficients réels, le second membre une matrice à coefficients imaginaires purs (on évitera de dire « complexes »). Ces deux matrices sont donc nulles.
  2. L'idée est de considérer cette application comme fonction polynôme d'une variable complexe. Elle est non nulle en  $i$  ( $P_1 + iP_2 = P$  est inversible), donc elle n'est pas constamment nulle. Elle a donc au plus un nombre fini de zéros complexes, a fortiori au plus un nombre fini de zéros réels. Il existe donc  $x_0$  tel que  $Q = P_1 + x_0P_2 \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{R})$ . Et on a  $QB = AQ$ ,  $A$  et  $B$  sont donc semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ .
-

**Exercice 3 (Utilisation de la comatrice).** A quelle condition nécessaire et suffisante (portant sur son déterminant) une matrice inversible de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$  a-t-elle son inverse dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$  ?

---

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$  admettant un inverse  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$  ; de  $AB = I_n$  on déduit  $\det(A) \det(B) = 1$ . Or  $\det(A)$  et  $\det(B)$  sont des entiers, on obtient donc  $\det(A) = \pm 1$ .

Réciproquement, si  $\det(A) = \pm 1$ , la comatrice de  $A$  étant dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ , on a

$$\frac{1}{\det(A)} {}^t\text{com}(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$$

ce qui conclut bien que  $A$  a son inverse dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ .

---

**Exercice 4 (Utilisation du théorème de structures des formes  $n$ -linéaires alternées sur un espace de dimension  $n$ ).** Soit  $\mathcal{B}$  une base d'un espace  $E$  de dimension  $n$ , et soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Démontrer que, pour toute famille  $(x_1, \dots, x_n)$  d'éléments de  $E$ ,

$$\sum_{k=1}^n \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \dots, x_n) = \text{tr}(u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

---

La clé est de voir que

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \dots, x_n)$$

est une forme  $n$ -linéaire (c'est simple) alternée (ce n'est pas très difficile : si  $x_i = x_j$  avec  $i \neq j$ , tous les termes dans la somme sont nuls sauf deux qui sont opposés l'un de l'autre). Il existe donc, par théorème de structure,  $\lambda$  tel que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n \quad \sum_{k=1}^n \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \dots, x_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

Pour la détermination de  $\lambda$ , on a bien entendu envie de prendre

$$(x_1, \dots, x_n) = (e_1, \dots, e_n)$$

où  $(e_1, \dots, e_n) = B$ . Donc

$$\sum_{k=1}^n \det_B(e_1, \dots, e_{k-1}, u(e_k), e_{k+1}, \dots, e_n) = \lambda$$

En notant  $A = \text{Mat}_B(u)$ , on voit par un calcul de déterminant simple que

$$\det_B(e_1, \dots, e_{k-1}, u(e_k), e_{k+1}, \dots, e_n) = a_{k,k}$$

pour tout  $k$ , ce qui donne la formule voulue.

---

**Exercice 5 (Diagonalisation).** Diagonaliser la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \dots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

(c'est-à-dire trouver une matrice diagonale semblable, la matrice de passage et son inverse). On ne se situe pas forcément sur  $\mathbf{R}$ , ce n'est donc pas une matrice symétrique **réelle**.

---

Le plus rapide est de remarquer qu'on a

$$A = \beta J + (\alpha - \beta)I_n$$

avec  $J$  une matrice pleine de 1. On est ramené à diagonaliser  $J$ , voir plus bas. On obtient, si  $J = PDP^{-1}$ ,

$$A = P(\beta D + (\alpha - \beta)I_n)P^{-1}$$

ce qui diagonalise bien.

Mais on peut aussi commencer par voir que  $(1, \dots, 1)$  est vecteur propre. Pour la valeur propre  $\alpha + (n - 1)\beta$ . On peut aussi calculer le polynôme caractéristique : on l'écrit, on ajoute toutes les lignes à une ligne ou toutes les colonnes à une colonne, ce qui permet de mettre en facteur  $X - \alpha - (n - 1)\beta$  et d'avoir une ligne (ou une colonne) de 1. On ajoute alors  $\beta$  fois cette ligne

ou cette colonne à toutes les autres, pour obtenir finalement le polynôme caractéristique

$$(X - (\alpha - \beta))^{n-1}(X - (\alpha + (n - 1)\beta))$$

et la résolution de  $AX = (\alpha - \beta)X$  (en appelant  $A$  la matrice concernée) mène à l'équation très simple

$$x_1 + \dots + x_n = 0$$

qui est celle d'un espace de dimension  $n - 1$  (hyperplan). Bref, c'est presque aussi rapide que :

Diagonalisation de  $J$  :

On peut remarquer que  $J^2 = nJ$ , donc  $X(X - n)$ , scindé simple, annule  $J$ . Et  $\text{Sp}(J) \subset \{0, n\}$ . Remarquons que  $\text{rg}(J) = 1$ , donc le noyau de  $J$  est un sous-espace propre de dimension  $n - 1$ . Donc  $P_J = X^{n-1}(X - \text{Tr}(J)) =$

$X^{n-1}(X - n)$ . Or le vecteur  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  est propre associé à  $n$ . Ne reste plus

qu'à trouver une base du noyau, ce qui se fait assez facilement. Ensuite, on remplit une matrice  $P$  avec des colonnes propres. Par exemple, avec

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et  $D_1 = \text{diag}(0, 0, \dots, 0, n)$ , on a

$$J = P_1 D_1 P_1^{-1}$$

ou alors (et il y a bien d'autres choix possibles) avec

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et  $D_2 = \text{diag}(n, 0, \dots, 0, 0)$ , on a

$$J = P_2 D_2 P_2^{-1}$$


---

**Exercice 6 (diagonalisabilité des matrices compagnes).** Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ , vérifier que  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $P$  est scindé simple (on vérifiera que le rang de  $A - \lambda I_n$  vaut au moins  $n - 1$ , pour tout  $\lambda$ ).

---

1. Il importe de savoir calculer le polynôme caractéristique d'une matrice compagne. Or une telle matrice ne se présente pas toujours de la même manière, les coefficients  $a_i$  pouvant être en dernière ligne, en dernière colonne... alors qu'ici ils sont en première ligne.

Il est fortement recommandé de commencer par  $n = 1$ ,  $n = 2$ ,  $n = 3$  : on trouve respectivement  $X - a_1$ ,  $X^2 - a_1 X - a_2$ ,  $X^3 - a_1 X^2 - a_2 X - a_3$ . Il n'est pas trop dur de conjecturer la formule générale. On a envie de le faire par récurrence, ce qui suggère de calculer  $\det(XI_n - A)$  en le développant par rapport à la dernière colonne. Mais tous les

développements « raisonnables », par rapport à la première ou dernière ligne ou colonne, marchent. Le développement par rapport à la première ligne n'est cependant pas conseillé : il faut beaucoup de soin pour ne pas se tromper dans l'écriture des mineurs. Si on aime les astuces (mais s'en souviendra-t-on à l'écrit ou à l'oral, le jour où on en aura besoin ?), on peut, en nommant  $c_1, \dots, c_n$  les colonnes, faire  $c_n \leftarrow c_n + Xc_{n-1} + X^2c_{n-2} + \dots + X^{n-1}c_1$ , qui amène directement le résultat.

- 
2. Les  $n - 1$  premières colonnes de  $A - \lambda I_n$  sont linéairement indépendantes. Donc le rang de  $A - \lambda I_n$  vaut  $n - 1$  ou  $n$  (et dans ce dernier cas,  $\lambda$  n'est pas valeur propre). D'après le théorème du rang, les sous-espaces propres sont donc de dimension 1. Et la condition suffisante de diagonalisabilité se transforme donc, dans ce cas, en condition nécessaire et suffisante.
- 
3. Le système se résout assez facilement... on retrouve qu'il y a soit une seule solution ( $0$ ,  $\lambda$  n'est pas valeur propre) soit une droite vectorielle de solutions.
- 

**Exercice 7 (Nilpotence : résultats classiques).** Soit  $\mathbf{K}$  un corps commutatif,  $E$  un  $\mathbf{K}$ -*ev* de dimension finie  $n$ ,  $u$  un endomorphisme nilpotent de  $E$ .

1. Démontrer que  $u$  est trigonalisable.
  2. Déterminer le polynôme caractéristique de  $u$ .
  3. De quelle forme est le polynôme minimal de  $u$ ? démontrer que l'indice de nilpotence de  $u$  est au plus égal à  $n$ .
- 
1.  $u$  a un polynôme annulateur scindé, de la forme  $X^p$ . Donc il est trigonalisable. Et  $\text{Sp}(u) \subset \{0\}$ .
  2. Il en découle (cns de trigonalisabilité) que  $P_u$  est scindé. Or sa seule valeur propre possible est  $0$ , donc  $P_u = X^n$ .
  3. Et par le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme minimal de  $u$  est  $X^p$  pour un certain  $p \leq n$ . C'est ce  $p$  qui est appelé indice de nilpotence.

### Exercice 8 (Sous-espaces caractéristiques et réduction de Dunford).

1. Soit  $u$  un endomorphisme nilpotent d'un espace de dimension finie non nulle  $n$ . On appelle  $p$  l'indice de nilpotence de  $u$ , c'est-à-dire le plus petit entier naturel pour lequel  $u^p = \Theta$ . Démontrer que  $u$  est trigonalisable. Quel est le polynôme minimal de  $u$ , son polynôme caractéristique? Démontrer que  $p \leq n$ .  $u$  peut-il être diagonalisable?
2. Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace  $E$  de dimension finie non nulle  $n$ . On suppose que le polynôme caractéristique de  $u$  est scindé. On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  ses racines, de multiplicités respectives  $m_1, \dots, m_q$ .

On note, pour chaque  $i$  entre 1 et  $q$  :  $F_i = \text{Ker}[(\lambda_i Id - u)^{m_i}]$ .  $F_i$  est appelé sous-espace caractéristique associé à la valeur propre  $\lambda_i$ .

- (a) Démontrer que  $F_i$  est stable par  $u$  et contient le sous-espace propre  $E_i$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$ .
- (b) Démontrer que  $E$  est somme directe des  $F_i$  ( $1 \leq i \leq q$ ).
- (c) Démontrer que  $u$  est diagonalisable si et seulement si  $F_i = E_i$  pour tout  $i$ .

---

Exercice très important !

1. **Soit  $u$  un endomorphisme nilpotent d'un espace de dimension finie non nulle  $n$ . On appelle  $p$  l'indice de nilpotence de  $u$ , c'est-à-dire le plus petit entier naturel pour lequel  $u^p = \Theta$ . Démontrer que  $u$  est trigonalisable. Quel est le polynôme minimal de  $u$ , son polynôme caractéristique? Démontrer que  $p \leq n$ .  $u$  peut-il être diagonalisable?**

---

Le polynôme **scindé**  $X^p$  est annulateur de  $u$ , donc  $u$  est trigonalisable. Son polynôme minimal est un diviseur de  $X^p$ , donc il est de la forme  $X^k$  où  $k \leq p$ . Mais, par définition de  $p$ , si  $k < p$  on a  $u^k \neq \Theta$ , donc le polynôme minimal de  $u$  est nécessairement  $X^p$ .

Et donc la seule racine possible pour le polynôme caractéristique de  $u$  est 0 (c'est la seule valeur propre possible pour  $u$ ). Or ce polynôme caractéristique est scindé (car  $u$  est trigonalisable), unitaire de degré  $n$ , c'est donc  $X^n$ .

Et, par le théorème de Cayley-Hamilton (le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique) on a  $p \leq n$ .

Si  $u$  est diagonalisable, comme il a une seule valeur propre (donc un seul sous-espace propre), c'est une homothétie, de rapport cette valeur propre, ici 0. Donc  $u = \Theta$ .

---

2. Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace  $E$  de dimension finie non nulle  $n$ . On suppose que le polynôme caractéristique de  $u$  est scindé. On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  ses racines, de multiplicités respectives  $m_1, \dots, m_q$ .

On note, pour chaque  $i$  entre 1 et  $q$  :  $F_i = \text{Ker}[(\lambda_i \text{Id} - u)^{m_i}]$ .  $F_i$  est appelé sous-espace caractéristique associé à la valeur propre  $\lambda_i$ .

- (a) Démontrer que  $F_i$  est stable par  $u$  et contient le sous-espace propre  $E_i$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$ .

---

$F_i$  est le noyau de  $P_i(u)$ , avec  $P_i = (\lambda_i - X)^{m_i}$ . Comme  $P_i(u)$  commute avec  $u$  (c'est un polynôme de  $u$ ), son noyau  $F_i$  est stable par  $u$  (cours). Mais, si  $f$  est un endomorphisme, si  $k < k'$ , on a  $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k'})$ , donc en particulier ici  $\ker[\lambda_i \text{Id} - u] \subset \ker[(\lambda_i \text{Id} - u)^{m_i}]$  ce qui traduit bien que

$$\boxed{E_i \subset F_i}$$


---

- (b) Démontrer que  $E$  est somme directe des  $F_i$  ( $1 \leq i \leq q$ ).
- 

*L'utilisation du théorème de Cayley-Hamilton et du théorème de décomposition des noyaux dans cette question est un grand classique de la réduction.*

Le polynôme caractéristique de  $u$ , supposé scindé, est

$$\chi_u = \prod_{i=1}^q (X - \lambda_i)^{m_i}$$

Si  $i \neq j$ ,  $X - \lambda_i \wedge X - \lambda_j = 1$ , donc  $(X - \lambda_i)^{m_i} \wedge (X - \lambda_j)^{m_j} = 1$  ;  
 le théorème de décomposition des noyaux dit alors :

$$\ker(\chi_u(u)) = \bigoplus_{i=1}^q \ker[(u - \lambda_i Id)^{m_i}]$$

Mais, d'après le théorème de Cayley-Hamilton,  $\chi_u(u) = \Theta$ , donc  
 $\ker(\chi_u(u)) = E$ , et on conclut bien :

$$E = \bigoplus_{i=1}^q F_i$$

(c) **Démontrer que  $u$  est diagonalisable si et seulement si  
 $F_i = E_i$  pour tout  $i$ .**

On a vu dans le **a.** que, pour tout  $i$ ,  $\dim(E_i) \leq \dim(F_i)$ . On ajoute  
 toutes ces inégalités, on obtient :

$$\sum_{i=1}^q \dim(E_i) \leq \sum_{i=1}^q \dim(F_i) = \dim(E)$$

Mais on sait que  $u$  est diagonalisable si et seulement si

$\sum_{i=1}^q \dim(E_i) = \dim(E)$ , donc si et seulement si l'inégalité ci-dessus est  
 une égalité. Or en ajoutant des inégalités (de même sens bien sûr,  
 sinon c'est interdit!) dont une au moins est stricte, on obtient une  
 inégalité stricte. Donc  $u$  est diagonalisable si et seulement si les in-  
 égalités  $\dim(E_i) \leq \dim(F_i)$  sont toutes des égalités, donc si et seule-  
 ment si (sachant que chaque  $E_i$  est inclus dans le  $F_i$  correspondant)  
 $F_i = E_i$  pour tout  $i$

3. On se place sous les hypothèses de la question précédente.  
 On appelle  $u_i$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F_i$ , et  $p_i$  la  
 projection sur  $F_i$  parallèlement à  $\bigoplus_{j \neq i} F_j$ .

- (a) **Démontrer que  $u_i$  s'écrit comme somme d'une homothétie  $h_i$  et d'un endomorphisme nilpotent  $n_i$  de  $F_i$ .**
- 

Si  $x \in F_i$ , par définition de ce sous-espace on a

$(\lambda_i Id - u)^{m_i}(x) = 0_E = 0_{F_i}$ . Mais, sur  $F_i$ ,  $u$  coïncide avec  $u_i$ , donc  $(\lambda_i Id_{F_i} - u_i)^{m_i}(x) = 0_{F_i}$ . Notant  $\Theta_i$  l'endomorphisme nul de  $F_i$ , on obtient  $(\lambda_i Id_{F_i} - u_i)^{m_i} = \Theta_i$ . Donc  $u_i - \lambda_i Id$  est nilpotent. Notons-le  $n_i$ , et notons  $h_i$  l'homothétie  $\lambda_i Id$ . On a bien :

$$\boxed{u_i = n_i + h_i}$$


---

- (b) **Construire, en utilisant ce qui précède, deux endomorphismes  $d$  et  $n$ , respectivement diagonalisable et nilpotent, tels que**

$$u = d + n \quad \text{et} \quad dn = nd$$


---

Soit  $x$  un élément de  $E$ . On peut le décomposer sur les  $F_i$  :

$$x = \sum_{i=1}^q p_i(x).$$

Donc

$$u(x) = \sum_{i=1}^q u(p_i(x)) = \sum_{i=1}^q u_i(p_i(x)) = \sum_{i=1}^q h_i(p_i(x)) + \sum_{i=1}^q n_i(p_i(x))$$

ce qui incite à définir

$$\boxed{d = \sum_{i=1}^q h_i \circ p_i \quad \text{et} \quad n = \sum_{i=1}^q n_i \circ p_i}$$

On a, par ce qui précède,  $u = d + n$ . Sur chaque  $F_i$ ,  $d$  coïncide avec  $h_i$  ; on sait qu'alors  $d$  est diagonalisable.

Sur chaque  $F_i$ ,  $n$  coïncide avec  $n_i$ . Or  $n_i^{m_i} = \Theta_i$ , donc, si  $m = \max(m_i)$ ,  $n_i^m = \Theta_i$ . Donc  $n^m$  est une application linéaire nulle sur chaque  $F_i$ , or la somme directe des  $F_i$  est  $E$ , donc  $n^m = \Theta$ . Et ainsi,  $n$  est nilpotent.

Mais  $n \circ d$  et  $d \circ n$  coïncident sur chaque  $F_i$  (car  $h_i \circ n_i = n_i \circ h_i$ ), donc sont égaux : nd=dn

---

**Remarque :** Chaque  $n_i$  est trigonalisable. Il existe donc une base de  $F_i$  dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure « stricte ». En réunissant de telles bases, on obtient une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_q \end{pmatrix}$$

(diagonale par blocs), chaque  $A_k$  étant un bloc  $m_k \times m_k$  triangulaire, de la forme

$$A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & & \\ 0 & \ddots & (*) & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

$M$  est donc diagonale par blocs et triangulaire ;  $d$  est l'endomorphisme dont la matrice dans cette base est la diagonale de  $M$ ,  $n$  est l'endomorphisme dont la matrice dans cette base est la matrice triangulaire supérieure stricte dont les coefficients hors diagonale sont ceux de  $M$  (les coefficients diagonaux étant nuls).

On peut construire une base pour que, dans  $M$ , les seuls coefficients non nuls hors de la diagonale soient tous égaux à 1 et situés juste au-dessus de celle-ci (c'est-à-dire en ligne  $i$  et colonne  $i + 1$  pour certains  $i$  dans  $[1, n - 1]$ ). C'est la réduction de Jordan, plus technique.

---

4. **Toute matrice  $M$  s'écrit donc comme somme  $D + N$  d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotente qui commutent. Quel est l'intérêt pour le calcul des puissances de  $M$  ?**
-

Comme  $D$  et  $N$  commutent, les puissances de leur somme peuvent être calculées en utilisant le binôme de Newton. De plus, si  $j \geq n$ , on a  $N^j = 0$ . Donc, si  $k \geq n - 1$ , on pourra écrire

$$(D + N)^k = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{k}{j} N^j D^{k-j}$$


---

5. On suppose  $u = d' + n'$  une autre décomposition vérifiant les conditions de 3.b. Vérifier que les  $F_i$  sont stables par  $d'$  et  $n'$ , en déduire que  $d = d'$  et  $n = n'$ .
- 

Si  $d'$  commute avec  $n'$ , elle commute avec  $n' + d' = u$ , et donc elle commute, par récurrence, avec toutes les « puissances » (pour  $\circ$ ) de  $u$  et, par combinaison linéaire, avec tous les polynômes de  $u$ . Donc  $d'$  laisse stables tous les  $F_i$  (qui sont des noyaux de polynômes de  $u$ ). De même pour  $n'$ .

On peut alors noter  $d'_i$  et  $n'_i$  les endomorphismes induits par  $d'$  et  $n'$  sur  $F_i$ . Soit  $\mu$  une valeur propre de  $d'_i$ ; le sous-espace propre associé  $\ker(d'_i - \mu Id_{F_i})$  est stable par  $n'_i$ , et l'endomorphisme induit par  $n'_i$  sur ce sous-espace ne peut être injectif (sinon, ce serait un automorphisme, or il a une puissance (pour  $\circ$ ) nulle, c'est donc impossible). Il existe donc  $x_i \in \ker(d'_i - \mu Id_{F_i})$  tel que  $n'_i(x_i) = 0_E$ . Mais alors  $u_i(x) = d'_i(x) + n'_i(x) = \mu x$ , or  $(X - \lambda_i)^{m_i}$  est annulateur de  $u_i$ , donc sa seule valeur propre possible est  $\lambda_i$ , donc  $\mu = \lambda_i$ . Finalement,  $d'_i$ , qui a une unique valeur propre et est diagonalisable, est  $h_i$ , et donc  $n'_i = n_i$ , l'unicité s'ensuit.

---

### Exercice 9 (Réduction par blocs).

Soit  $A, B$  deux matrices carrées d'ordre  $p$  et  $q$  respectivement. On définit par blocs la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que  $M$  est diagonalisable si et seulement si  $A$  et  $B$  le sont.
2. Démontrer que  $M$  est trigonalisable si et seulement si  $A$  et  $B$  le sont.

---

**Méthode polynomiale :** On démontre par récurrence, en utilisant le produit par blocs, que

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad M^k = \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & B^k \end{pmatrix}$$

et, par combinaison linéaire de ces égalités, pour tout polynôme  $P$  :

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}$$

Si  $M$  est diagonalisable, il existe  $P$  scindé à racines simples tel que  $P(M) = 0$ . Alors  $P(A) = P(B) = 0$ , donc  $A$  et  $B$  sont diagonalisables.

Réciproquement, si  $A$  et  $B$  sont diagonalisables, il existe  $Q_1$  et  $Q_2$  scindés à racines simples tels que  $Q_1(A) = 0$  et  $Q_2(B) = 0$  (remarque : on note toujours  $0$  la matrice nulle, quel que soit son format, ce qui est un peu abusif!). Soit  $P = \text{ppcm}(Q_1, Q_2)$ .  $P$  est scindé simple (on peut écrire  $Q_1 = \prod_{i=1}^d (X - a_i)^{m_i}$  et  $Q_2 = \prod_{i=1}^d (X - a_i)^{m'_i}$  avec  $m_i$  et  $m'_i$  dans  $\{0, 1\}$ , et alors

$$P = \prod_{i=1}^d (X - a_i)^{\max(m_i, m'_i)}, \text{ et } P(M) = 0, \text{ donc } M \text{ est diagonalisable.}$$

On peut aussi raisonner par équivalences, en utilisant le polynôme minimal : on sait que

$$P(M) = 0 \Leftrightarrow P(A) = P(B) = 0$$

et donc, si  $\mathcal{I}_M$  (resp.  $\mathcal{I}_A, \mathcal{I}_B$ ) désigne l'idéal des polynômes annulateurs de  $M$  (resp. de  $A$ , de  $B$ ),  $\mathcal{I}_M = \mathcal{I}_A \cap \mathcal{I}_B$ , donc, notant  $\mu_M$  le polynôme annulateur de  $M$  (resp...),  $\mu_M = \text{ppcm}(\mu_A, \mu_B)$ . Et donc

$$\begin{aligned} M \text{ diagonalisable} &\Leftrightarrow \mu_M \text{ scindé simple} \\ &\Leftrightarrow \mu_A \text{ et } \mu_B \text{ scindés simples} \\ &\Leftrightarrow A \text{ et } B \text{ diagonalisables} \end{aligned}$$

**Méthode « vectorielle »** Notons  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbf{K}^{p+q}$  canoniquement associé à  $M$ . Si  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{p+q})$  est la base canonique de  $\mathbf{K}^{p+q}$ , alors  $F = \text{Vect}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)$  et  $G = \text{Vect}(\epsilon_{p+1}, \dots, \epsilon_{p+q})$  sont stables par  $u$ , et si on note  $u_F$  et  $u_G$  les endomorphismes induits par  $u$  sur ces sous-espaces, alors  $A = \mathcal{M}_{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)}(u_F)$  et  $B = \mathcal{M}_{(\epsilon_{p+1}, \dots, \epsilon_{p+q})}(u_G)$ . D'après le cours, si  $u$  est diagonalisable,  $u_F$  et  $u_G$  le sont, donc  $A$  et  $B$  le sont. Réciproquement, si  $A$  et  $B$  sont diagonalisables,  $u_F$  et  $u_G$  le sont, il existe donc une base de  $F$  formée

de vecteurs propres de  $u_F$  (donc de  $u$ ) et une base de  $G$  formée de vecteurs propres de  $u_G$  (donc de  $u$ ) ; en « recollant » ces deux bases, on obtient une base de  $\mathbf{K}^{p+q}$  formée de vecteurs propres de  $u$ , donc  $u$  est diagonalisable, donc  $M$  l'est.

**Autre méthode** On peut calculer le polynôme caractéristique  $\chi_M$  de  $M$  :  $\chi_M = \chi_A \chi_B$ , donc  $\text{Sp}(M) = \text{Sp}(A) \cup \text{Sp}(B)$ . Puis, pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(M)$ , on essaye de trouver le sous-espace propre associé en résolvant  $MX = \lambda X$ . La structure par blocs de  $M$  suggère d'écrire, pour tout  $X \in \mathcal{M}_{p+q,1}(\mathbf{K})$ ,  $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$  où  $X_1 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$  et  $X_2 \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbf{K})$ , et alors

$$MX = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} AX_1 = \lambda X_1 \\ BX_2 = \lambda X_2 \end{cases}$$

Pour résoudre, on distingue trois cas,  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  et  $\lambda \notin \text{Sp}(B)$ ,  $\lambda \in \text{Sp}(B)$  et  $\lambda \notin \text{Sp}(A)$ ,  $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$ . On y arrive (en appliquant la caractérisation de la diagonalisabilité qui utilise la somme des dimensions des sous-espaces propres), mais c'est plus long que les méthodes précédentes.

**Autre idée** Si  $A$  et  $B$  sont diagonalisables, on a  $A = PDP^{-1}$  et  $B = Q\Delta Q^{-1}$  (notations habituelles :  $P$  et  $Q$  inversibles,  $\Delta$  et  $D$  diagonales). La matrice  $R = \begin{pmatrix} P & (0) \\ (0) & Q \end{pmatrix}$  est inversible, d'inverse  $R^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & (0) \\ (0) & Q^{-1} \end{pmatrix}$ , et, en effectuant un produit par blocs, on trouve que  $R^{-1}MR$  est diagonale. Donc  $M$  est diagonalisable. Cette idée ne marche pas très bien pour la réciproque.

**Démontrer que  $M$  est trigonalisable si et seulement si  $A$  et  $B$  le sont.**

Ici, les méthodes polynomiale et vectorielle fonctionnent, mais il est beaucoup plus rapide de dire que  $\chi_M$  est scindé si et seulement si  $\chi_A$  et  $\chi_B$  le sont (car  $\chi_M = \chi_A \chi_B$ ).

### Exercice 10 (Réduction simultanée).

1. Soit  $u, v$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, diagonalisables. Démontrer que  $u$  et  $v$  commutent si et seulement si ils sont diagonalisables dans une même base, c'est-à-dire si et seulement s'il existe une base formée de vecteurs propres à la fois pour  $u$  et pour  $v$  (on pourra utiliser la stabilité des sous-espaces propres de  $u$  par  $v$  ou réciproquement). Énoncer ce résultat en termes de matrices.
2. Dans cette question, le corps de base est  $\mathbf{C}$ . On suppose que  $u$  et  $v$  commutent, mais on ne les suppose plus diagonalisables. Démontrer qu'ils ont au moins un vecteur propre commun (on pourra utiliser la stabilité des sous-espaces propres de  $u$  par  $v$  ou réciproquement). Utiliser ce résultat pour démontrer que  $u$  et  $v$  sont simultanément trigonalisables.

---

#### Diagonalisation simultanée

Si  $u$  et  $v$  sont diagonalisables dans une même base, soit  $\mathcal{B}$  une telle base. Deux matrices diagonales commutent, donc

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u \circ v)$$

ce qui permet bien de conclure  $u \circ v = v \circ u$ .

Supposons, réciproquement,  $u \circ v = v \circ u$ . Notons  $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  (les  $\lambda_i$  étant deux à deux distincts), et, pour tout  $i$  entre 1 et  $p$ ,  $E_i(u) = \ker(u - \lambda_i Id)$ . Comme  $u$  est diagonalisable,

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$$

(on note  $E$  l'espace vectoriel sur lequel sont définis  $u$  et  $v$ ). Les  $E_i$  sont stables par  $v$  (car  $v$  commute avec les  $u - \lambda_i Id$ ). Donc  $v$  induit sur chaque  $E_i$  un endomorphisme  $v_i$  qui est, d'après le cours, diagonalisable. Soit  $\mathcal{B}_i$  une base de  $E_i$  formée de vecteurs propres de  $v_i$ , donc de vecteurs propres de  $v$ . En « réunissant » les bases  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ , on obtient une base de  $E$  (adaptée à

$E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ ) formée de vecteurs propres pour  $u$  et pour  $v$ . Donc  $u$  et  $v$  sont simultanément diagonalisables.

En termes de matrices : soit  $A, B$  deux matrices diagonalisables ;  $AB = BA$  si et seulement s'il existe  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$  et  $D, \Delta$  diagonales telles que  $A = PDP^{-1}$  et  $B = P\Delta P^{-1}$

---

### Trigonalisation simultanée

Le corps de base étant algébriquement clos,  $\text{Sp}(u) \neq \emptyset$ . Soit  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ .  $v$  laisse stable  $\text{Ker}(u - \lambda Id)$ , car  $v$  et  $u - \lambda Id$  commutent. Et donc  $v$  induit sur  $\text{Ker}(u - \lambda Id)$  un endomorphisme  $v_\lambda$ . Cet endomorphisme admet un vecteur propre (car le corps de base est algébriquement clos). Or un vecteur propre de  $v_\lambda$  est un vecteur propre de  $v$  qui est dans  $\text{Ker}(u - \lambda Id)$ , et donc est aussi vecteur propre pour  $u$ .

**Montrons par récurrence** la propriété  $\mathcal{P}_n$  : « si  $A$  et  $B$  sont deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  qui commutent, alors il existe  $P$  inversibles et  $T, T'$  triangulaires supérieures telles que  $A = PTP^{-1}$  et  $B = PT'P^{-1}$  ».

Pour  $n = 1$ , c'est bien clair.

Montrons que  $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ ; soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{C})$  qui commutent. Les endomorphismes  $u$  et  $v$  de  $\mathbf{C}^{n+1}$  canoniquement associés à  $A$  et  $B$  commutent, donc d'après ce qui précède ont un vecteur propre commun. Dans une base commençant par ce vecteur propre, leurs matrices respectives sont de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & A'' & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B' = \begin{pmatrix} \mu & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & B'' & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$A'$  et  $B'$  commutent, donc, par produit par blocs,  $A''$  et  $B''$  commutent. On peut leur appliquer  $\mathcal{P}_n$ , il existe donc  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C})$  et  $T'', U''$  triangulaires supérieures telles que

$$P^{-1}A''P = T'' \quad , \quad P^{-1}B''P = U''$$

Soit alors  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & P & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathcal{GL}_{n+1}(\mathbf{C})$ ; un produit par blocs montre que  $Q^{-1}A'Q$  et  $Q^{-1}B'Q$  sont triangulaires supérieures.

---

**Supplément à la diagonalisation simultanée** : Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux. Démontrer

qu'il existe une base dans laquelle les matrices de tous ces endomorphismes sont diagonales (on pourra commencer par une famille finie).

---

Montrons par récurrence  $\mathcal{P}_n$  : « si  $u_1, \dots, u_n$  sont  $n$  endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux, il existe une base dans laquelle les matrices de tous ces endomorphismes sont diagonales ».

$\mathcal{P}_2$  a été démontrée.

Montrons  $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ . Soit donc  $u_1, \dots, u_{n+1}$   $n + 1$  endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux. Soit  $E_\lambda$  un sous-espace propre de  $u_{n+1}$ ;  $E_\lambda$  est stable par  $u_1, \dots, u_n$ , qui induisent sur  $E_\lambda$  des endomorphismes  $u_{\lambda,1}, \dots, u_{\lambda,n}$ . Ces endomorphismes commutent car ils sont induits par des endomorphismes qui commutent. Par  $\mathcal{P}_n$ , il existe une base de  $E_\lambda$  formée de vecteurs propres communs à  $u_{\lambda,1}, \dots, u_{\lambda,n}$ , donc de vecteurs propres communs à  $u_1, \dots, u_n$ . Ces vecteurs sont aussi vecteurs propres de  $u_{n+1}$ , puisqu'ils sont dans  $E_\lambda$ . Or  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u_{n+1})} E_\lambda$ ; en « réunissant » des bases des  $E_\lambda$  comme

celle qu'on vient de construire, on obtient une base de  $E$  formée de vecteurs propres communs à  $u_1, \dots, u_{n+1}$ . D'où  $\mathcal{P}_{n+1}$ . Pour une famille  $(u_i)_{i \in I}$  quelconque d'endomorphismes diagonalisables qui commutent, on commence par remarquer que si on considère une sous-famille finie  $(u_j)_{j \in J}$ , où  $J$  est une partie finie de  $I$ , ses éléments sont simultanément diagonalisables (d'après ce qui vient d'être fait). Donc toute combinaison linéaire des  $u_i$  est diagonalisable. Donc tous les éléments de  $\text{Vect}(u_i)_{i \in I}$  sont diagonalisables. Or ils commutent entre eux (facile). Mais cet espace est de dimension finie (comme sev de  $\mathcal{L}(E)$ ), on peut en prendre une base et lui appliquer le cas « fini », ce qui conclut : tous les éléments de  $\text{Vect}(u_i)_{i \in I}$  sont simultanément diagonalisables.

---

**Exercice 11 (Utilisation des polynômes annulateurs).** Soit  $A$  une matrice diagonalisable; montrer que, pour tout  $p$  entier naturel,  $A^p$  est diagonalisable.

Réciproquement, soit  $p \geq 2$  et  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C})$  tels que  $A^p$  soit diagonalisable. Démontrer que  $A$  est diagonalisable. Donner un exemple montrant que ce résultat est en général faux si on ne suppose pas la matrice inversible, ou si on la suppose inversible mais que l'on est sur  $\mathbf{R}$ .

Si  $A^p$  est diagonale,  $A$  est-elle diagonale?

---

De  $A = PDP^{-1}$  on tire  $A^p = PD^pP^{-1}$ , ce qui résout la première question. La seconde se résout en utilisant un argument polynomial : si  $A^p$  est diagonalisable, elle admet un polynôme annulateur scindé simple  $P$ . Mais  $P(X^p)$  annule alors  $A$ . Est-il scindé simple ? pour le voir, on écrit

$$P(X) = \prod_{i=1}^r (X - a_i)$$

où les  $a_i$  sont deux à deux distincts. A quoi sert l'hypothèse d'inversibilité de  $A$  ? à pouvoir supposer les  $a_i$  non nuls (on peut par exemple choisir pour  $P$  le polynôme minimal de  $A^p$ , cette matrice n'ayant pas 0 pour valeur propre). Chaque  $a_i$  a exactement  $p$  racines  $p$ -ièmes distinctes :  $\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,p}$ . On a alors

$$P(X^p) = \prod_{i=1}^r (X^p - a_i) = \prod_{i=1}^r \left( \prod_{k=1}^p (X - \alpha_{i,k}) \right)$$

qui est scindé simple (deux nombres complexes qui n'ont pas la même puissance  $p$ -ième ne peuvent pas être égaux). Et donc  $A$  est diagonalisable.

La considération de  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  avec  $p = 2$  montre que la réciproque est fautive. Comme toujours sur  $\mathbf{R}$ , la matrice  $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est utile :  $R^2$  est diagonalisable (diagonale, même) et pourtant  $R$  ne l'est pas. Et par la même occasion on voit que la réponse à la dernière question est négative.

Si  $A$  est diagonalisable,  $A^p$  l'est, elles sont semblables à des matrices diagonales ( $D$  et  $D^p$ ) qui ont le même nombre de coefficients nuls sur la diagonale, donc leurs noyaux sont de même dimension, or  $\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}(A^p) \dots$  Supposons réciproquement que  $A^p$  soit diagonalisable, et que  $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^p)$ . On suppose ce noyau non nul, sinon le travail a déjà été fait. Et on écrit

$$P(X) = X \prod_{i=1}^r (X - a_i)$$

le polynôme minimal de  $A^p$ , avec les  $a_i$  deux à deux distincts, non nuls. Avec les notations ci-dessus, le polynôme

$$X^p \prod_{i=1}^r \left( \prod_{k=1}^p (X - \alpha_{i,k}) \right)$$

annule  $A$ , donc, par théorème des noyaux,

$$\mathbf{K}^n = \text{Ker}(A^p) \oplus \bigoplus_{i=1}^r \left( \bigoplus_{k=1}^p \text{Ker}(A - \alpha_{i,k} I_n) \right)$$

Mais en remplaçant  $\text{Ker}(A^p)$  par  $\text{Ker}(A)$ , on obtient que  $\mathbf{K}^n$  est somme de sous-espaces propres de  $A$  (dans la somme directe, il y a peut-être des espaces réduits à  $\{0_{\mathbf{K}^n}\}$ , mais ce n'est pas grave, ils ne comptent pas). Donc  $A$  est diagonalisable.

---

**Exercice 12 (Topologie matricielle classique).**

1. En considérant par exemple, pour toute matrice  $A$ , les matrices  $A - \lambda I_n$  ( $\lambda \in \mathbf{K}$ ), démontrer que  $\mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$  est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  ( $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ ).
2. En « perturbant » les coefficients diagonaux, démontrer que l'ensemble des matrices triangulaires diagonalisables est dense dans l'ensemble des matrices triangulaires ( $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ ). En déduire que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ .

---

Clairement,

$$A - \frac{1}{p}I_n \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} A$$

Or  $\text{Sp}(A)$  est fini, il y a donc un rang  $p_0$  tel que, si  $p \geq p_0$ ,  $\frac{1}{p} \notin \text{Sp}(A)$ , ce qui conclut.

Si  $T$  est une matrice triangulaire, considérons par exemple (de nombreuses idées analogues fonctionnent)

$$A_p = T + \text{diag} \left( \frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \dots, \frac{n}{p} \right)$$

La matrice  $A_p$  est triangulaire supérieure, une condition suffisante pour qu'elle soit diagonalisable est donc que l'on ait les  $(A_p)_{i,i}$  tous distincts. Si ce n'est pas le cas, il existe  $i$  et  $j$  distincts tels que

$$t_{i,i} + \frac{i}{p} = t_{j,j} + \frac{j}{p}$$

autrement dit, nécessairement,  $t_{i,i} \neq t_{j,j}$ , et

$$p = \frac{j - i}{t_{i,i} - t_{j,j}}$$

ce qui ne peut se produire qu'un nombre fini de fois, il y a donc un rang à partir duquel  $A_p$  est diagonalisable.

Soit maintenant  $A \in M_n(\mathbf{C})$  quelconque. On la trigonalise :

$$A = PTP^{-1} \quad , T \in T_n^+(\mathbf{C}), \quad P \in GL_n(\mathbf{C})$$

On a vu qu'il existait une suite  $(T_p)$  de matrices diagonalisables qui converge vers  $T$ . L'application  $M \mapsto PMP^{-1}$  est continue (linéaire sur un espace de dimension finie), donc

$$PT_pP^{-1} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} PTP^{-1} = A$$

et les  $PT_pP^{-1}$ , semblables à des matrices diagonalisables, le sont. Ce qui conclut.

**Exercice 13 (Sous-espaces stables par un endomorphisme).** Déterminer tous les sous-espaces stables par l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$\begin{pmatrix} -11 & -9 & 9 \\ 12 & 10 & -12 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Evidemment,  $\{(0, 0, 0)\}$  et  $\mathbf{K}^3$  sont stables. Les droites stables sont les droites engendrées par les vecteurs propres. Il s'agit donc de les trouver. On calcule le polynôme caractéristique :

$$\begin{vmatrix} X+11 & 9 & -9 \\ -12 & X-10 & 12 \\ 3 & 3 & X-1 \end{vmatrix} \stackrel{C3 \leftarrow C3 + C2}{=} \begin{vmatrix} X+11 & 9 & 0 \\ -12 & X-10 & X+2 \\ 3 & 3 & X+2 \end{vmatrix}$$

On factorise par  $X+2$ , on soustrait la dernière ligne à la deuxième, le polynôme caractéristique vaut donc

$$(X+2) \begin{vmatrix} X+11 & 9 & 0 \\ -15 & X-13 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire  $(X+2)(X^2 - 2X - 11 \times 13 + 9 \times 15)$  ou encore  $(X+2)^2(X-4)$ . Si l'on note  $A$  la matrice, alors

$$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -9 & -9 & 9 \\ 12 & 12 & -12 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

est de rang 1, donc le sous-espace associé à la valeur propre  $-2$  est de dimension 2, donc la matrice est diagonalisable. Les droites stables sont les droites engendrées par un vecteur non nul élément d'un des deux sous-espaces propres (autrement dit, les droites propres sont la droite  $E_4(A)$  ou toute droite incluse dans le plan  $E_{-2}(A)$ ).

Soit  $P$  un plan stable : l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ ,  $u$ , induit sur  $P$  un endomorphisme diagonalisable (cours). Donc  $P$  admet une base formée de deux vecteurs propres de  $A$ . Si ces deux vecteurs propres sont associés à la valeur propre  $-2$ , alors  $P = E_{-2}(A)$ . Sinon,  $P$  est engendré par un vecteur de  $E_4(A)$  et un vecteur de  $E_{-2}(A)$ . Mais tout plan contenant  $E_4(A)$  a avec  $E_{-2}(A)$  une intersection qui est une droite (relation de Grassmann) (faire un dessin, ça se voit !). On en déduit, la réciproque étant claire, que les plans stables sont les plans contenant  $E_4(A)$  d'une part, et le plan  $E_{-2}(A)$  d'autre part.

**Exercice 14 (Quelques questions classiques sur la topologie matricielle).** Ici, lorsque l'on parle de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ,  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ .

1. Démontrer que  $\mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$  est un ouvert dense de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .
2. Démontrer que l'application  $A \mapsto A^{-1}$  est continue sur  $\mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$ .
3. Ici,  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ . Démontrer que le groupe des matrices orthogonales est compact.
4. L'ensemble des matrices symétriques est-il ouvert ? fermé ? ni l'un ni l'autre ? (dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ).
5. L'ensemble des matrices nilpotentes est-il ouvert ? fermé ? ni l'un ni l'autre ? (dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ).
6. Démontrer que l'ensemble des matrices de rang 1 n'est ni ouvert ni fermé.
7. Démontrer que l'ensemble des matrices de rang supérieur ou égal à  $k$  est ouvert.

1. Vu plus haut pour la densité, un grand classique. Et  $GL_n(\mathbf{K}) = \det^{-1}(\mathbf{K} \setminus \{0\})$ , image réciproque d'un ouvert par une application continue car polynomiale...
2. Les coefficients de  $\text{com}(A)$  sont fonctions polynomiales de ceux de  $A$ . La formule

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t(\text{com}(A))$$

conclut alors (la continuité du déterminant

3. Plus que classique...
4.  $A \mapsto A - A^T$  est continue car linéaire sur un espace de dimension finie. Donc fermé car image réciproque de  $\{(0)\}$ ...
5. L'application  $A \mapsto A^n$  est continue car polynomiale sur un espace de dimension finie. Donc fermé car image réciproque de  $\{(0)\}$ ... *On utilise le fait qu'une matrice nilpotente  $n \times n$  a un indice  $\leq n$ .*
6. La suite  $\left(\frac{1}{p}J\right)_{p \geq 1}$  converge vers  $(0)$  qui n'est pas de rang 1. Or la matrice  $J$  (dont tous les coefficients valent 1) est de rang 1. Donc l'ensemble des matrices de rang 1 n'est pas fermé.
7. Utiliser la continuité du déterminant et le « petit résultat » : une matrice  $A$  est de rang  $\geq r$  si et seulement si il existe  $I$  et  $J$  tels que  $|I| = |J| = r$  et  $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  est inversible.