CCP 2012 math 2 corrigé

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Cet entier est quelconque sauf dans la partie I, où il est égal à 2.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $(E_{i,j})$ sa base canonique ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$) et I_n sa matrice unité (tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls, sauf celui situé à la i^{e} ligne et à la j^{e} colonne, qui vaut 1).
On note $\mathbf{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels.
Dans tout le problème, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.
Pour tout $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbf{R}[X]$, on note $P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k$. L'ensemble des matrices $P(A)$ pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$ est noté $\mathbf{R}[A]$.
On dit que P annule A lorsque $P(A) = 0$, ce qui équivaut à $P(u) = 0$. On appelle polynôme minimal de la matrice A le polynôme minimal de l'endomorphisme u ; c'est donc le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule A.
On note φ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\varphi_A(M) = AM - MA$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés des éléments propres de ϕ_A. Les parties I et II étudient la diagonalisabilité de φ_A, les parties III et IV en étudient les vecteurs propres.
Les quatre parties sont indépendantes.

Partie I. Étude du cas $n = 2$

Dans toute cette partie, on prendra $n = 2$.

1. Vérifier que l'application φ_A est linéaire et que I_2 et A appartiennent à $\ker \phi_A$.

Si $(M, N) \in (\mathcal{M}_2(\mathbf{R}))^2$, si $\lambda \in \mathbf{R}$, alors

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda M + N) &= A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)A \\ &= \lambda(AM - MA) + AN - NA \\ &= \lambda\varphi_A(M) + \varphi_A(N)\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\varphi_A \text{ est linéaire}}$
de plus
$\varphi_A(I_2) = AI_2 - I_2A = A - A = (0)$
$\varphi_A(A) = AA - AA = (0)$

$$\boxed{(I_2, A) \in (\ker \varphi_A)^2}$$

Dans la suite de cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

2. Donner la matrice de φ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

On calcule $\varphi_A(E_{1,1}) = aE_{2,1} - bE_{1,2}$ (en « posant les tableaux » ou en utilisant la table de multiplication de la base canonique, peu importe), $\varphi_A(E_{2,2}) = -cE_{2,1} + bE_{1,2}$, $\varphi_A(E_{1,2}) = -cE_{1,1} + cE_{2,2} + (a-d)E_{1,2}$ et $\varphi_A(E_{2,1}) = bE_{1,1} - bE_{2,2} + (d-a)E_{2,1}$. Finalement, la matrice cherchée est

$$\boxed{\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c & b \\ 0 & 0 & c & -b \\ -b & b & a-d & 0 \\ c & -c & 0 & d-a \end{pmatrix}}$$

Dans la suite de cette partie, on suppose que $\varphi_A \neq 0$ (c'est-à-dire que $A \neq \lambda I_2$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$).

3. Donner le polynôme caractéristique de φ_A sous forme factorisée (on pourra utiliser la calculatrice).

Notons-le P :

$$P(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & c & -b \\ 0 & X & -c & b \\ b & -b & X-(a-d) & 0 \\ -c & c & 0 & X-(d-a) \end{vmatrix}$$

On ajoute par exemple la deuxième colonne à la première, ce qui permet de factoriser X :

$$P(X) = X \begin{vmatrix} 1 & 0 & c & -b \\ 1 & X & -c & b \\ 0 & -b & X-(a-d) & 0 \\ 0 & c & 0 & X-(d-a) \end{vmatrix}$$

Puis on retranche la première ligne à la deuxième, et on développe par rapport à la première colonne :

$$P(X) = X \begin{vmatrix} X & -2c & 2b \\ -b & X-(a-d) & 0 \\ c & 0 & X-(d-a) \end{vmatrix}$$

Le développement par la règle de Sarrus donne alors

$$P(X) = X\left[X\left(X^2 - (a-d)^2\right) - 2bc(X-(a-d)) - 2bc(X-(d-a))\right]$$

Et donc

$$\boxed{P(X) = X^2\left[X^2 - (a-d)^2 - 4bc\right]}$$

4. En déduire que φ_A est diagonalisable si et seulement si $(d-a)^2+4bc>0$.

Si $(d-a)^2+4bc<0$, le polynôme caractéristique de φ_A n'est pas scindé sur $\mathbf{R}$, donc φ_A n'est pas diagonalisable.
Si $(d-a)^2+4bc=0$, $\mathrm{Sp}(\varphi_A)=\{0\}$. Pour que φ_A soit diagonalisable, il faut alors qu'elle soit nulle, donc $a=b$, $b=c=0$, exclu par hypothèse.
Si $(d-a)^2+4bc>0$, $\mathrm{Sp}(\varphi_A)=\{0,\sqrt{(d-a)^2+4bc},-\sqrt{(d-a)^2+4bc}\}$. Les deux valeurs propres non nulles sont simples, les sous-espaces propres associés sont donc de dimension 1. La valeur propre 0 est double, et donc $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A))\leq 2$. Mais d'autre part I_2 et A sont dans $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$, et forment par hypothèse une famille libre. Donc $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_A))=2$. La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $1+1+2$, c'est-à-dire 4, or $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbf{R}))=4$. Donc φ_A est diagonalisable.

$$\boxed{\varphi_A \text{ est diagonalisable si et seulement si } (d-a)^2+4bc>0}$$

---

5. Démontrer que φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Le polynôme caractéristique de A est $P_A=X^2-(a+d)X+ad-bc$. Soit $\Delta=(a+d)^2-4(ad-bc)$.
Si $\Delta<0$, P_A n'est pas scindé, A ne peut pas être diagonalisable.
Si $\Delta=0$, A a une valeur propre unique. Elle est diagonalisable si et seulement si elle est de la forme λI_2, ce qui est exclu.
Si $\Delta>0$, A a deux valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.
Donc A est diagonalisable si et seulement si $\Delta>0$. Mais

$$\Delta=(a-d)^2+4bc$$

Donc

$$\boxed{\varphi_A \text{ est diagonalisable si et seulement si } A \text{ est diagonalisable}}$$

Partie II. Étude du cas général

On note $c=(c_1,\dots,c_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

6. On suppose dans cette question que A est diagonalisable.
On note $e=(e_1,\dots,e_n)$ une base de vecteurs propres de u (défini au début du problème) et, pour tout entier i tel que $1\leq i\leq n$, λ_i la valeur propre associée au vecteur e_i. On note alors P la matrice de passage de la base c à la base e et $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$.
Enfin, pour tout couple (i,j) d'entiers tels que $1\leq i\leq n$ et $1\leq j\leq n$, on pose :

$$B_{i,j}=PE_{i,j}P^{-1}$$

(a) Exprimer, pour tout couple (i,j), la matrice $DE_{i,j} - E_{i,j}D$ en fonction de la matrice $E_{i,j}$ et des réels λ_i et λ_j.

On a $\boxed{DE_{i,j} - E_{i,j}D = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}}$

J'espère que ça suffit, comme justification...Un certain nombre de candidats est capable de faire ça de tête.

(b) Démontrer que, pour tout couple (i,j), $B_{i,j}$ est un vecteur propre de ϕ_A.

On calcule

$$\begin{aligned} \phi_A(B_{i,j}) &= PDP^{-1}PE_{i,j}P^{-1} - PE_{i,j}P^{-1}PDP^{-1} \\ &= P\left[DE_{i,j} - E_{i,j}D\right]P^{-1} \\ &= (\lambda_i - \lambda_j)B_{i,j} \end{aligned}$$

Comme de plus $B_{i,j} \neq (0)$,

$$\boxed{B_{i,j} \text{ est un vecteur propre de } \varphi_A}$$

(c) En déduire que φ_A est diagonalisable.

L'application $M \longmapsto PMP^{-1}$ étant un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (automorphisme réciproque : $M \longmapsto P^{-1}MP$), transforme la base $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ en une base de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Cette base est constituée de vecteurs propres de φ_A, donc

$$\boxed{\varphi_A \text{ est diagonalisable}}$$

---

7. On suppose dans cette question que φ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On note $(P_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ une base de vecteurs propres de φ_A et, pour tout couple (i,j), $\lambda_{i,j}$ la valeur propre associée à $P_{i,j}$.

(a) Dans cette question, on considère A comme une matrice à coefficients complexes ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$) et φ_A comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ (défini par $\varphi_A(M) = AM - MA$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$).

i. Justifier que toutes les valeurs propres de φ_A sont réelles.

La famille $(P_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, c'est donc une base du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

[*il va de soi qu'on considère $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ comme $\mathbf{C}$-espace vectoriel, car c'est l'habitude, si on ne la suivait pas l'énoncé le dirait. $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est bien, aussi, un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, mais de dimension $2n^2$, il faudrait rajouter par exemple les $iP_{u,v}$ pour avoir une base du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$***]**

Elle est en effet libre : si les $\alpha_{r,s}$ et les $\beta_{r,s}$ sont des réels,

$$\sum_{1\leq r,s\leq n} (\alpha_{r,s} + i\beta_{r,s})P_{r,s} = (0) \Longrightarrow \sum_{1\leq r,s\leq n} \alpha_{r,s}P_{r,s} = \sum_{1\leq r,s\leq n} \beta_{r,s}P_{r,s} = (0)$$
$$\Longrightarrow \forall (r,s) \qquad \alpha_{r,s} = \beta_{r,s} = 0$$

et elle comprend n^2 vecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ qui est de dimension n^2. Dans cette base, la matrice de ϕ_A est diagonale, à diagonale réelle, donc

$\boxed{\text{Toutes les valeurs propres de } \varphi_A \text{ sont réelles.}}$ (ce sont les $\lambda_{i,j}$).

[Remarque : en utilisant aussi les $iP_{r,s}$, on voit que même si on considère $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ comme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, les valeurs propres de ϕ_A sont réelles ! **]**.

---

ii. Soit $z \in \mathbf{C}$. Justifier que si z est une valeur propre de A, alors z est aussi une valeur propre de A^T.

Si z est valeur propre de A, alors $\det(zI_n - A) = 0$. Mais alors $\det\left((zI_n - A)^T\right) = 0$, donc $\det(zI_n - A^T) = 0$. Et donc

$$\boxed{\text{Si } z \text{ est valeur propre de } A,\ z \text{ est aussi valeur propre de } A^T}$$

---

iii. Soit $z \in \mathbf{C}$. On suppose que z et $\overline{z}$ sont deux valeurs propres de la matrice A. On considère alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ ($X \neq 0$) et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ ($Y \neq 0$) tels que $AX = zX$ et $A^T\ Y = \overline{z}Y$. En calculant $\varphi_A\left(X\ Y^T\right)$, démontrer que $z - \overline{z}$ est une valeur propre de φ_A.

On calcule

$$\begin{aligned}\varphi_A(X\ Y^T) &= AXY^T - XY^TA \\ &= zXY^T - X(A^TY)^T \\ &= zXY^T - X(\overline{z}Y)^T \\ &= (z-\overline{z})XY^T\end{aligned}$$

Reste à vérifier que $XY^T \neq 0$. Mais $(XY^T)_{i,j} = x_iy_j$ pour tous i,j dans $[\![1,n]\!]$. Il existe i tel que $x_i \neq 0$ et j tel que $y_j \neq 0$, on a alors $(XY^T)_{i,j} \neq 0$. Et on conclut bien

$$\boxed{z - \overline{z} \text{ est une valeur propre de } \varphi_A}$$

(b) En déduire que la matrice A a au moins une valeur propre réelle.

Poursuivons iii. : donc, d'après i., $z - \overline{z} \in \mathbf{R}$. Mais d'autre part $z - \overline{z} \in i\mathbf{R}$. Donc $z - \overline{z} = 0$. Et donc $\boxed{z \in \mathbf{R}}$.

Mais la matrice A a au moins une valeur propre complexe z. Et $\overline{z}$ est alors aussi valeur propre de A,...

car si $AX = zX$ avec $X \neq 0$, $\overline{AX} = \overline{zX}$ (on note $\overline{Y}$ la matrice, colonne ici, dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de Y), donc $A\overline{X} = \overline{z}\overline{X}$, et $\overline{X} \neq 0$...

ou, peut-être mieux, car les valeurs propres de A sont les racines de $\det(XI_n - A)$, qui est dans $\mathbf{R}[X]$, ce qui implique que si z en est racine alors $\overline{z}$ aussi.

Finalement, $\boxed{A \text{ a au moins une valeur propre réelle}}$.

On note λ une valeur propre réelle de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ ($X \neq 0$) une matrice colonne telle que $AX = \lambda X$.

(c) Démontrer que, pour tout couple (i, j), il existe un réel $\mu_{i,j}$, que l'on exprimera en fonction de λ et $\lambda_{i,j}$, tel que $AP_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$.

On calcule :

$$\begin{aligned} AP_{i,j}X &= \varphi_A(P_{i,j})X + P_{i,j}AX \\ &= \lambda_{i,j}P_{i,j}X + P_{i,j}(\lambda X) \\ &= (\lambda_{i,j} + \lambda)P_{i,j}X \end{aligned}$$

On obtient bien

$$\boxed{AP_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X \text{ avec } \mu_{i,j} = \lambda_{i,j} + \lambda}$$

(d) En déduire que A est diagonalisable.

[*La question la plus délicate du problème. Que veut-on ? une base de vecteurs propres. Les $P_{i,j}X$ sont vecteurs propres lorsqu'ils sont non nuls, et il s ne sont certainement pas indépendants, car il y en a n^2 dans un espace de dimension n. Donc on aimerait bien extraire des $P_{i,j}X$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Quand peut-on extraire d'une famille donnée une base ? quand cette famille est génératrice. On va donc essayer de montrer que la famille est génératrice. Mais il faut encore réfléchir : comment montrer que cette famille est génératrice ? à l'aide de la surjectivité de...***]**

Considérons $\psi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \\ M & \longmapsto & MX \end{cases}$. Constatons que ψ est surjective. Pourquoi ?

Méthode « standard » : (*Inadaptée ici, mais on la donne quand même. Voir à la fin la « bonne méthode », appelée méthode directe*) pour étudier l'image d'une application linéaire en dimension finie (il est clair ici que ψ est linéaire) on étudie son noyau. Or

$$\psi(M) = 0 \Longleftrightarrow MX = 0$$

Donc

$$\mathrm{Ker}(\psi) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \ ; \ MX = 0\}$$

Mais déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(\psi)$ demande un petit peu de réflexion.

Sous-méthode 1 : résoudre le problème dans un cas où X est simple : prenons $X = E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{Ker}(\psi)$ est l'ensemble des matrices de première ligne nulle, il est donc de dimension $n^2 - n$. Si, maintenant, X est quelconque non nulle, il existe $P \in GL_n(\mathbf{R})$ tel que $X = PE_1$ (en effet, $X = PE_1$ signifie que X est la première colonne de P. Or étant donné une colonne non nulle, X ici, elle peut être complétée en une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, et la matrice dont la famille des colonnes est cette base est inversible). Alors

$$\psi(M) = 0 \Longleftrightarrow MPE_1 = 0$$

donc, si $\psi_1 \ : \ M \longmapsto ME_1$, l'application $M \mapsto MP$ est une application linéaire de $\mathrm{Ker}(\psi)$ dans $\mathrm{Ker}(\psi_1)$, bijective car P est inversible, donc $\dim\left(\mathrm{Ker}(\psi)\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}(\psi_1)\right) = n^2 - n$.

Sous-méthode 2 : en considérant les endomorphismes associés, si x est le vecteur dont la matrice colonne des composantes dans la base canonique est X, la dimension de $\mathrm{Ker}(\psi)$ est la dimension de

$$F = \{u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n) \ ; \ u(x) = 0\}$$

en complétant x en une base $(x, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{R}^n$, F est l'ensemble des endomorphismes de $\mathbf{R}^n$ dont la matrice dans cette base a une première colonne nulle, donc est de dimension $n^2 - n$.

On conclut alors, en remarquant que le théorème du rang donne

$$n^2 = \mathrm{rg}(\psi) + \dim\left(\mathrm{Ker}(\psi)\right)$$

et donc $\mathrm{rg}(\psi) = n$, ψ est surjective.

Méthode directe : soit $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$; montrons que pour tout $y \in \mathbf{R}^n$ il existe $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n$ tel que $u(x) = y$. Comme on peut compléter x en une base $(x, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbf{R}^n$, c'est une conséquence de la définition d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base. Matriciellement, cela revient bien à dire que ψ est surjective.

Fin de la démonstration :

Comme ψ est surjective, la famille $(P_{i,j}X)_{1 \leq i,j \leq n}$ engendre $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on peut donc en extraire une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Cette base étant constituée de vecteurs propres de A,

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$$

Partie III. Étude des vecteurs propres de φ_A associés à la valeur propre 0

Soit m le degré du polynôme minimal de A.

8. Démontrer que la famille $\left(I_n, A, \ldots, A^{m-1}\right)$ est une base de $\mathbf{R}[A]$.

Question de cours ! à repérer depuis la lecture initiale de l'énoncé, et à bien rédiger. Le principal ingrédient est la division euclidienne des polynômes.

---

9. Vérifier que $\mathbf{R}[A]$ est inclus dans $\operatorname{Ker}(\varphi_A)$ et en déduire une minoration de $\dim(\operatorname{Ker}(\varphi_A))$.

Tout polynôme de A commute avec A, donc

$$\boxed{\mathbf{R}[A] \subset \operatorname{Ker}(\varphi_A)}$$

et donc

$$\boxed{\dim(\operatorname{Ker}(\varphi_A)) \geq m}$$

---

10. *Un cas d'égalité*

On suppose que l'endomorphisme u (défini au début du problème) est nilpotent d'indice n (c'est-à-dire que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$). On considère un vecteur y de $\mathbf{R}^n$ tel que $u^{n-1}(y) \neq 0$ et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on pose $e_i = u^{n-i}(y)$.

(a) Démontrer que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbf{R}^n$.

Comme $\dim(\mathbf{R}^n) = n$, il suffit de montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est libre. Supposons

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = 0$$

où les α_k sont des réels. C'est-à-dire

$$\alpha_1 u^{n-1}(y) + \alpha_2 u^{n-2}(y) + \cdots + \alpha_n y = 0 \tag{1}$$

Si $k \geq n$, $u^k(y) = 0$, et $u^{n-1}(y) \neq 0$. Donc, en appliquant successivement u^{n-1}, u^{n-2},…,u à (1) on obtient successivement $\alpha_n = 0$, $\alpha_{n-1} = 0$,…,$\alpha_2 = 0$, puis enfin $\alpha_1 = 0$ car $y \neq 0$. On conclut bien que

$$\boxed{(e_1, \dots, e_n) \text{ est une base de } \mathbf{R}^n}$$

(b) Soient $B \in \ker \varphi_A$ et v l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à B.

Démontrer que si $v(y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ ($\alpha_i \in \mathbf{R}$) alors $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$.

Notant $w = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$, on a par définition $w(y) = v(y)$. Et, si $1 \leq$

$i \leq n$,

$$\begin{aligned} w(e_i) &= w\left(u^{n-i}(y)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u^{n-k}\left(u^{n-i}(y)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u^{2n-i-k}(y) \\ &= u^{n-i}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u^{n-k}(y)\right) \\ &= u^{n-i}\left(v(y)\right) \end{aligned}$$

Mais $AB = BA$, donc $u \circ v = v \circ u$, et donc $u^j \circ v = v \circ u^j$ pour tout entier naturel j (récurrence sur j), et donc

$$w(e_i) = v\left(u^{n-i}(y)\right) = v(e_i)$$

Comme w et v coïncident sur une base, on conclut

$$\boxed{\text{Si } v(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \ (\alpha_i \in \mathbf{R}) \text{ alors } v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}}$$

(c) En déduire $\ker \varphi_A$.

Mais $v(y)$ peut toujours se décomposer sur la base $(e_1, \ldots, e_n)$, donc on a toujours, si $B \in \operatorname{Ker}(\phi_A)$, $v \in \mathbf{R}[u]$, et donc $B \in \mathbf{R}[A]$. L'inclusion réciproque ayant été montrée en 9., $\boxed{\operatorname{Ker}(\phi_A) = \mathbf{R}[A]}$

---

11. *Cas où u est diagonalisable*

On suppose que u est diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ $(1 \leq p \leq n)$ les p valeurs propres distinctes de u et, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k. On note m_k la dimension de cet espace propre.

(a) Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et v l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à B. Démontrer que $B \in \ker \varphi_A$ si et seulement si, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ est stable par v (c'est-à-dire $v(E_u(\lambda_k)) \subset E_u(\lambda_k)$).

Remarquons d'abord que

$$B \in \ker \varphi_A \Longleftrightarrow v \circ u = u \circ v$$

Supposons $u \circ v = v \circ u$. Soit $k \in [\![1, p]\!]$. Pour $x \in E_u(\lambda_k)$, on a

$$u(x) = \lambda_k x$$

donc

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda_k x) = \lambda_k v(x)$$

donc $v(x) \in E_u(\lambda_k)$, on a donc la stabilité de $E_u(\lambda_k)$ par v.
Supposons que les $E_u(\lambda_k)$ $(1 \leq k \leq p)$ soient stables par v. Alors, pour tout k, pour tout $x \in E_u(\lambda_k)$,

$$u(v(x)) = \lambda_k v(x)$$

et

$$v(u(x)) = v(\lambda_k x) = \lambda_k v(x)$$

Donc $u \circ v$ et $v \circ u$ coïncident sur tous les $E_u(\lambda_k)$. Mais

$$\mathbf{R}^n = E_u(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E_u(\lambda_p)$$

on a donc bien $v \circ u = u \circ v$. Et donc

$\boxed{B \in \ker \varphi_A \text{ si et seulement si, pour tout entier } k \text{ tel que } 1 \leq k \leq p, E_u(\lambda_k) \text{ est stable par } v}$

(b) En déduire que $B \in \ker \varphi_A$ si et seulement si la matrice de v, dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbf{R}^n$ en somme directe des sous-espaces propres de u, a une forme que l'on précisera.

Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbf{R}^n$ adaptée à

$$\mathbf{R}^n = E_u(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E_u(\lambda_p)$$

La question précédente montre que $B \in \ker \varphi_A$ si et seulement si la matrice de v dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs, du type

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} M_1 & & & & \\ & M_2 & & (O) & \\ & & \ddots & & \\ & (O) & & \ddots & \\ & & & & M_p \end{pmatrix}$$

où chaque M_i est une matrice de $\mathcal{M}_{m_i}(\mathbf{R})$ (c'est la matrice dans une base extraite de $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme induit par v sur $E_u(\lambda_i)$).

(c) Préciser la dimension de $\ker \varphi_A$.

L'application

$$w \longmapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(w)$$

est un isomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. L'application

$$(M_1, \ldots M_p) \longmapsto \begin{pmatrix} M_1 & & & & \\ & M_2 & & (O) & \\ & & \ddots & & \\ & (O) & & \ddots & \\ & & & & M_p \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{m_1}(\mathbf{R}) \times \cdots \times \mathcal{M}_{m_p}(\mathbf{R})$ sur l'espace des matrices du type décrit en (b). Et

$$\dim\left(\mathcal{M}_{m_1}(\mathbf{R}) \times \cdots \times \mathcal{M}_{m_p}(\mathbf{R})\right) = m_1 + \cdots + m_p$$

On en tire $\boxed{\dim\left(\mathrm{Ker}(\varphi_A)\right) = \sum_{k=1}^{p} \left[\dim\left(E_u(\lambda_k)\right)\right]^2}$

(d) Lorsque $n = 7$, donner toutes les valeurs possibles pour cette dimension en envisageant les différentes valeurs possibles de p et des m_k (on ne demande pas de justification).

On notera $d = \dim\left(\mathrm{Ker}(\varphi_A)\right)$.
Les dimensions m_k sont évidemment données à permutation près.
$p = 7 : m_1 = \cdots = m_7 = 1$, $\boxed{d = 7}$
$p = 6 : m_1 = 2$, $m_2 = \ldots = m_6 = 1$, $\boxed{d = 9}$
$p = 5 : m_1 = 3$, $m_2 = \ldots = m_5 = 1$, $\boxed{d = 13}$
$p = 5 : m_1 = m_2 = 2$, $m_3 = \ldots = m_5 = 1$, $\boxed{d = 11}$
$p = 4 : m_1 = 4$, $m_2 = m_3 = m_4 = 1$, $\boxed{d = 19}$
$p = 4 : m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $m_3 = m_4 = 1$, $\boxed{d = 15}$
$p = 4 : m_1 = m_2 = m_3 = 2$, $m_4 = 1$, $\boxed{d = 13}$
$p = 3 : m_1 = 5$, $m_2 = m_3 = 1$, $\boxed{d = 27}$
$p = 3 : m_1 = 4$, $m_2 = 2$, $m_3 = 1$, $\boxed{d = 21}$
$p = 3 : m_1 = 3 = m_2 = 3$, $m_3 = 1$, $\boxed{d = 19}$
$p = 3 : m_1 = 3$, $m_2 = m_3 = 2$, $\boxed{d = 17}$
$p = 2 : m_1 = 6$, $m_2 = 1$, $\boxed{d = 37}$
$p = 2 : m_1 = 5$, $m_2 = 2$, $\boxed{d = 29}$
$p = 2 : m_1 = 4$, $m_2 = 3$, $\boxed{d = 25}$
$p = 1 : m_1 = 7$, $\boxed{d = 49}$
Ordonnées, les dimensions possibles sont
$\boxed{7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 25, 27, 29, 37, 49}$

Partie IV. Étude des vecteurs propres de φ_A associés à une valeur propre non nulle

Dans cette partie, α est une valeur propre non nulle de φ_A et B un vecteur propre associé ($B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $B \neq 0$). On note π_B le polynôme minimal de B et d le degré de π_B.

12. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\varphi_A\left(B^k\right) = \alpha k B^k$.

Par récurrence sur k : $\varphi_A(I_n) = 0$. Et si $\varphi_A(B^k) = \alpha k B^k$, alors

$$\begin{aligned}\varphi_A(B^{k+1}) &= AB^{k+1} - B^{k+1}A \\ &= (AB^k - B^kA)B + B^kAB - B^{k+1}A\end{aligned}$$

(l'astuce est assez naturelle, car on veut faire apparaître $\varphi_A(B^k)$). Donc

$$\varphi_A(B^{k+1}) = \alpha k B^k + B^k \alpha A = \alpha(k+1)B^{k+1}$$

ce qui donne bien, par récurrence,

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N} \qquad \varphi_A(B^k) = \alpha k B^k}$$

---

13. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Exprimer $\varphi_A(P(B))$ en fonction de α, B et $P'(B)$.

Pour $P = X^k$,

$$\phi_A(P(B)) = \alpha B P'(B)$$

Les applications $P \longmapsto \phi_A(P(B))$ et $P \longmapsto \alpha BP'(B))$ sont linéaires sur $\mathbf{R}[X]$ et coïncident sur la base canonique, donc sont égales.

$$\boxed{\forall P \in \mathbf{K}[X] \qquad \varphi_A(P(B)) = \alpha B P'(B)}$$

---

14. Démontrer que le polynôme $X\pi_B' - d\pi_B$ est le polynôme nul (π_B' étant le polynôme dérivé du polynôme minimal de la matrice B).

Appliquant à π_B ce qui précède, on obtient

$$\alpha B \pi_B'(B) = 0$$

Donc, comme $\alpha \neq 0$, $X\pi_B'$ est annulateur de B, donc divisible par π_B. Mais $\deg(X\pi_B') = \deg(\pi_B) = d$, donc $X\pi_B'$ et π_B sont associés. En comparant leurs coefficients dominants, on obtient bien $\boxed{X\pi_B' - d\pi_B = 0}$.

---

15. En déduire que $B^d = 0$.

Ecrivant $\pi_B = \displaystyle\sum_{j=0}^{d} \alpha_j X^j$, on a $X\pi_B' = \displaystyle\sum_{j=0}^{d} j\alpha_j X^j$. En identifiant les composantes dans la base canonique, pour tout j,

$$j\alpha_j = d\alpha_j$$

et donc, si $j < d$, $\alpha_j = 0$. Donc $\pi_B = X^d$ et π_B est annulateur de B...

FIN