mp* 16-17 : révisions pour l'écrit - Probabilités

I Chapitres concernés

P0, P1, P2, P3, P4

II Questions de cours les plus classiques

Il est prudent de savoir
- Démontrer la formule de Bayes.
- Recalculer l'espérance et la variance d'une loi binomiale à partir de celles d'une loi de Bernoulli et de la propriété de la variance d'une somme de variables deux à deux indépendantes.
- Recalculer fonctions génératrices et moments des lois usuelles : Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson, uniforme.
- Redémontrer que la loi géométrique est sans mémoire et (moins important quand même) montrer la réciproque.
- Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Démontrer l'inégalité de Markov, en déduire Bienaymé-Tchebychev, puis la loi faible des grands nombres.
- Savoir établir simplement le lien entre la fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires indépendantes et les fonctions génératrices de ces variables.
- Savoir démontrer la propriété d'approximation par la loi de Poisson.

III Exercices

Exercice 1. [Tirage simultané, tirage sans remise]

1. Dans une urne, il y a N_1 boules rouges ($N_1 \geq 1$), N_2 boules blanches ($N_2 \geq 1$). On tire simultanément n boules ($1 \leq n \leq N_1 + N_2$). Quelle

est la probabilité que, parmi ces n boules, il y ait exactement k boules rouges ($k \in \mathbf{N}$) ?

2. Dans une urne, il y a N_1 boules rouges ($N_1 \geq 1$), N_2 boules blanches ($N_2 \geq 1$). On tire succesivement n boules ($1 \leq n \leq N_1 + N_2$), sans remise. Quelle est la probabilité que, parmi ces n boules, il y ait exactement k boules rouges ($k \in \mathbf{N}$) ?

Savoir retrouver la loi hypergéométrique. Eventuellement, admettre que tirage sans remise et tirage simultané sont équivalents. Si on sait le démontrer rigoureusement, c'est encore mieux, mais ce n'est pas une priorité.

Exercice 2. On considère trois urnes U_1, U_2, U_3 contenant 12 boules chacune.
Dans U_1, il y a 4 boules rouges, 4 noires, 4 blanches.
Dans U_2, il y a 6 boules rouges, 2 noires, 4 blanches.
Dans U_3, il y a 2 boules rouges, 6 noires, 4 blanches.
Un individu jette un dé. Si le dé donne 1 ou 2, il tire une boule au hasard dans l'urne U_1. Si le dé donne 3 ou 4, il tire une boule au hasard dans l'urne U_2. Si le dé donne 5 ou 6, il tire une boule au hasard dans l'urne U_3. Un observateur (qui ne voit pas le résultat du lancer de dé, et ne peut pas distinguer les urnes, mais connaît les données du problème) constate que la boule tirée est rouge. S'il devait faire un pari, il aurait sûrement intérêt à miser sur le fait que le dé a donné 3 ou 4. Calculer la probabilité pour qu'effectivement le résultat du lancer de dé ait été un 3 ou un 4.

Savoir identifier les situations mettant en jeu la formule de Bayes (probabilité des causes). Savoir appliquer cette formule.

Exercice 3 (Le lemme de Borel-Cantelli).

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'événements, on note
$$\limsup_{n\to+\infty}(A_n) = \bigcap_{p=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right)$$
On suppose $\sum_n P(A_n) < +\infty$. Montrer que
$$P(\limsup_{n\to+\infty}(A_n) = 0$$

2. On reprend les notations du 1., mais on change les hypothèses : on suppose $\sum_n P(A_n) = +\infty$ et les A_n indépendants. Montrer que

$$P(\limsup_{n\to+\infty}(A_n) = 1$$

1. **Borel-Cantelli « facile »** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'événements, on note

$$\limsup_{n\to+\infty}(A_n) = \bigcap_{p=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right)$$

On suppose $\sum_n P(A_n) < +\infty$. Montrer que

$$P(\limsup_{n\to+\infty}(A_n) = 0$$

Par continuité décroissante,

$$P(\limsup_{n\to+\infty}(A_n) = \lim_{p\to+\infty}\left(P\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right)\right)$$

Mais

$$P\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=p}^{+\infty} P(A_n)$$

Et la suite des restes d'une série convergente converge vers 0, ce qui permet de conclure.

---

2. **Borel-Cantelli « difficile »** On reprend les notations du 1., mais on change les hypothèses : on suppose $\sum_n P(A_n) = +\infty$ et les A_n indépendants. Montrer que

$$P(\limsup_{n\to+\infty}(A_n) = 1$$

Il faut avoir une première idée : l'indépendance se traduit mieux avec des intersections qu'avec des réunions d'événements. On va donc considérer l'évènement complémentaire de la limite supérieure :

$$B = \bigcup_{p=0}^{+\infty} \left(\bigcap_{n=p}^{+\infty} \overline{A_n} \right)$$

Par continuité croissante,

$$P(B) = \lim_{p \to +\infty} \left(P \left(\bigcap_{n=p}^{+\infty} \overline{A_n} \right) \right)$$

Or la famille d'événements $\left(\overline{A_n}\right)_{n \geq 0}$ est une famille d'événements indépendants. On a envie d'écrire, pour utiliser cette indépendance :

$$P \left(\bigcap_{n=p}^{+\infty} \overline{A_n} \right) = \prod_{n=p}^{+\infty} P(\overline{A_n})$$

mais l'étude des produits infinis n'est pas au programme, on va donc simplement s'intéresser aux produits partiels :

$$\begin{aligned} P \left(\bigcap_{n=p}^{+\infty} \overline{A_n} \right) &= \lim_{q \to +\infty} \left(P \left(\bigcap_{n=p}^{q} \overline{A_n} \right) \right) \\ &= \lim_{q \to +\infty} \left(\prod_{n=p}^{q} P(\overline{A_n}) \right) \\ &= \lim_{q \to +\infty} \left(\prod_{n=p}^{q} (1 - P(A_n)) \right) \end{aligned}$$

La deuxième idée est de prendre le logarithme, l'hypothèse portant sur une série. Mais il faut pour cela supposer qu'au moins à partir d'un certain rang, $P(A_n) < 1$. On fait donc l'hypothèse suivante :

$$\forall n \geq n_0 \qquad P(A_n) < 1$$

Alors, si $n_0 \leq p \leq q$,

$$\ln \left(\prod_{n=p}^{q} (1 - P(A_n)) \right) = \sum_{n=p}^{q} \ln (1 - P(A_n))$$

La suite $(P(A_n))$ ne converge pas vers 0 a priori, donc on ne peut pas utiliser d'équivalents. On utilise donc une comparaison basée sur

$$\forall x > -1 \qquad \ln(1+x) \leq x$$

(ce n'est pas une inégalité du cours, il faut donc savoir la démontrer, en étudiant la fonction $x \mapsto x - \ln(1+x)$ ou en remarquant que la fonction $x \ln(1+x)$ est concave sur $]-1, +\infty[$, donc au-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0).
Donc

$$\ln\left(\prod_{n=p}^{q}(1 - P(A_n))\right) \leq -\sum_{n=p}^{q} P(A_n)$$

Mais $\sum P(A_n) = +\infty$, donc

$$\sum_{n=p}^{q} P(A_n) \xrightarrow[q\to+\infty]{} +\infty$$

et donc

$$\ln\left(\prod_{n=p}^{q}(1 - P(A_n))\right) \xrightarrow[q\to+\infty]{} -\infty$$

et, donc,

$$P\left(\bigcap_{n=p}^{+\infty} \overline{A_n}\right) = 0$$

Donc $P(B) = 0$ ce qui conclut.
Reste le cas où il y aurait une infinité de A_n tels que $P(A_n) = 1$. Mais dans ce cas, pour tout $p \in \mathbf{N}$,

$$P\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right) = 1$$

et le résultat cherché s'ensuit directement.

Savoir démontrer le lemme de Borel-Cantelli dans le cas « facile »...le cas difficile est aussi très intéressant, mais au niveau ccp (voire Centrale-Mines), on donnerait probablement des indications.

Exercice 4 (Hiérarchie de l'existence des moments). Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé, r et r' deux nombres réels tels que $0 < r' < r$. Montrer que

$$\mathbf{E}\left[|X|^r\right] < +\infty \;\Rightarrow\; \mathbf{E}\left[|X|^{r'}\right] < +\infty$$

Comprendre que ce qui peut empêcher l'existence des moments, ce sont les « grandes » valeurs (en valeur absolue) de la variable aléatoire.

L'idée est assez simple : ce sont les « grandes » valeurs prises par $|X|$ qui peuvent gêner l'existence de l'espérance. Or, si $|X(\omega)|$ est « grand », $|X(\omega)|^r$ est d'autant plus grand que r est grand. Que signifie « grand » ? tout simplement plus grand que 1. On a

$$|X(\omega)| > 1 \ \Rightarrow |X(\omega)|^{r'} \leq |X(\omega)|^r$$

ce qui permet d'écrire

$$\forall \omega \in \Omega \quad |X(\omega)|^{r'} \leq |X(\omega)|^r + 1$$

et de conclure.

Exercice 5 (Une formule et classique). Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. Montrer que

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X \geq j)$$

Exercice 6 (L'espérance via une loi conditionnelle). On considère deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$; on suppose que Y est d'espérance finie. Montrer que

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{x \in X(\Omega), \mathbf{P}(X=x) \neq 0} \mathbf{E}(Y|X = x)\mathbf{P}(X = x)$$

où l'on désigne par $\mathbf{E}(Y|X = x)$ l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$.

Savoir utiliser un schéma de preuve utile : on sait que $\sum u_n$ converge. Et on sait que, pour tout n, $\sum_k u_{n,k}$ converge. Alors, **si les $u_{n,k}$ sont positifs**, ils forment une famille sommable, on peut donc écrire

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k}\right)$$

Savoir enfin, pour se ramener à ce contexte, écrire par exemple

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=2}^{n} u_{n,k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}\right)$$

en rajoutant simplement des définitions de $u_{n,k}$ nuls.

Rappelons que la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est définie par, pour $y \in Y(\Omega)$:

$$\mathbf{P}_{Y|X=x}(\{y\}) = \mathbf{P}(Y = y|X = x)$$

(il faut supposer $\mathbf{P}(X = x) \neq 0$, oubli de l'énoncé).
Commençons par supposer $Y \geq 0$. Pour $y \in Y(\omega)$, la famille

$$(y\mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y|X = x))_{x\in X(\Omega)}$$

est sommable, de somme $y\mathbf{P}(Y = y)$ (formule des probabilités totales). Et la famille $(y\mathbf{P}(Y = y))_{y\in Y}$ est sommable (du fait que Y est d'espérance finie). Il en découle, par sommabilité par paquets, que la famille

$$(y\mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y|X = x))_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$$

est sommable. Et donc, pour tout $x \in X(\Omega)$, la famille

$$(y\mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y|X = x))_{y\in Y(\Omega)}$$

est sommable, donc aussi la famille

$$(y\mathbf{P}(Y = y|X = x))_{y\in Y(\Omega)}$$

ce qui exprime que la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est d'espérance finie. Et on a

$$\sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y|X = x) = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{E}(Y|X = x)$$

ce qui permet de dire que la famille $(\mathbf{P}(X=x)\mathbf{E}(Y|X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ; et la formule

$$\sum_{x\in X(\omega)} \mathbf{P}(X=x)\mathbf{E}(Y|X=x) = \sum_{y\in Y(\omega) y\mathbf{P}(Y=y)}$$

donne le résultat.
Si Y n'est pas à valeurs positives, ce qui précède appliqué à $|Y|$ permet d'affirmer que la famille

$$(y\mathbf{P}(X=x)\mathbf{P}(Y=y|X=x))_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$$

est sommable, on a le droit de la sommer « dans les deux sens » et on obtient la formule.

Exercice 7 (Loi binomiale négative).

1. Soit $p \in]0,1[$. On considère n variables aléatoires indépendantes X_i $(1 \leq i \leq n)$ de même loi $\mathcal{G}(p)$. On note $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Montrer que, pour tout $k \geq n$,

$$P(S_n = k) = p^n(1-p)^{k-n}\binom{k-1}{n-1}$$

Calculer l'espérance et la variance de S_n.

2. On joue à Pile ou Face ; la probabilité d'obtenir Pïle est p. on définit $T_k = n$ lorsque le $n$ième tirage est celui où l'on obtient Pile pour la k-ième fois. Déterminer la loi de T_k.

Exercice 8 (Comparaison de variables géométriques, fonctions de répartition, loi d'un max ou d'un min. . .).

1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ (on notera $q = 1-p$). Calculer $\mathrm{P}(Y \geq X)$. Calculer aussi $\mathrm{P}(Y > X)$ et $\mathrm{P}(Y = X)$. Donner les résultats dans le cas particulier $p = 1/2$.

2. On suppose que $U_1, U_2, \ldots, U_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et que, pour tout k, $U_k \sim \mathcal{G}(p_k)$. On note, pour tout k, $q_k = 1 - p_k$. Identifier la loi de

$$\min(U_1, U_2, \ldots, U_n)$$

3. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Décrire la loi de
$$\max(X,Y)-\min(X,Y)$$

Savoir utiliser, pour une variable géométrique, les $\mathbf{P}(X>k)$ ou $\mathbf{P}(X\geq k)$ plutôt que les $\mathbf{P}(X=k)$.

Exercice 9. [Oral ccp]
Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :
$\forall\,(i,j)\in\mathbb{N}^2,\ P((X=i)\cap(Y=j))=\dfrac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}j!}$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. (a) Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X=Y)$.

Savoir les liens entre loi conjointe et lois marginales.

Exercice 10. Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ et àă valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On considère la série entière $\sum t^nP(X=n)$ de variable réelle t.
   On note R_X son rayon de convergence.

   (a) Prouver que $R\geqslant 1$.
   On pose alors $G_X(t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}t^nP(X=n)$ et note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
   Justifier que $[-1,1]\subset D_{G_X}$.

   Pour tout réel t fixé, exprimer G_X sous forme d'une espérance.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant votre réponse, $P(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.

2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   Déterminer D_{G_X} et, $\forall\, t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.

   (b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X+Y$.

Exercice 11. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. Calculer, en fonction de g_X (fonction génératrice de X), $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq n)t^n$.

Exercice 12 (Classique : somme aléatoire de variables aléatoires, identités de Wald). Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}_*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, et N une variable aléatoire sur le même espace, indépendante des X_i (i.e. la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$, avec $X_0 = N$, est une suite de variables aléatoires indépendantes). On suppose que les X_i et N sont à valeurs dans $\mathbf{N}_*$. Et on pose

$$S_N = X_1 + \ldots + X_N$$

c'est-à-dire, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$S_{N(\omega)} = X_1(\omega) + \ldots + X_{N(\omega)}(\omega)$$

1. Exprimer la fonction génératrice de S_N à l'aide des fonctions génératrices de X_1 et de N (on rappelle que toutes les X_i ont même loi, donc même fonction génératrice).
2. En déduire que, si les X_i et N sont d'espérances finies, S_N l'est, et calculer $\mathbf{E}(S_N)$ en fonction de $\mathbf{E}(X_1)$ et de $\mathbf{E}(N)$.
3. Retrouver le résultat précédent sans utiliser les fonctions génératrices.
4. On suppose que N et X_1 ont des moments d'ordre 2. Montrer

$$\mathbf{E}\big((S_N - \mathbf{E}(X)N)^2\big) = \mathbf{V}(X)\mathbf{E}(N)$$

   et

$$\mathbf{V}(S_N) = \mathbf{V}(X)\mathbf{E}(N) + \mathbf{E}(X)^2\mathbf{V}(N)$$

Exercice 13. [Fonction génératrice conjointe]
On considère deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbf{N}$. Montrer que

$$g\ :\ (\xi,\eta)\mapsto \mathbf{E}(\xi^X\eta^Y)$$

est définie sur $[0,1]^2$. Comment s'obtiennent les fonctions génératrices de X et Y à partir de g ? Montrer que g est de classe C^∞ sur $]-1,1[\times]-1,1[$, retrouver la loi conjointe de (X,Y) à partir des dérivées partielles de g en $(0,0)$.

On prend comme d'habitude $0^0=1$. Alors la variable aléatoire $\xi^X\eta^Y$ est à valeurs dans $[0,1]$ si $(\xi,\eta)\in[0,1]^2$. Etant bornée, elle est d'espérance finie. Si $(\xi,\eta)\in[-1,1]^2$, la variable aléatoire $\xi^X\eta^Y$ est également bornée. Donc en fait g est bien définie sur $[-1,1]^2$, et on retrouve les fonctions génératrices de X et Y en donnant à ξ ou à η la valeur 1.
Par théorème de transfert, si $(\xi,\eta)\in[-1,1]^2$,

$$g(\xi,\eta)=\sum_{(n,p)\in\mathbf{N}^2}\xi^n\eta^p\mathbf{P}(X=n,Y=p)$$

Fixons maintenant $\eta\in]-1,1[$. La famille $\left(\xi^n\eta^p\mathbf{P}(X=n,Y=p)\right)_{(n,p)\in\mathbf{N}^2}$ est assez facilement sommable, ce qui permet entre autres d'écrire

$$g(\xi,\eta)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\xi^n$$

où

$$a_n=\sum_{p=0}^{+\infty}\eta^p\mathbf{P}(X=n,Y=p)$$

Donc $|a_n|\leq\mathbf{P}(X=n)$. Le rayon de convergence de la série entière (de la variable ξ) $\sum a_n\xi^n$ est donc ≥ 1, ce qui montre que, sur tout $]-1,1]^2$, g est dérivable par rapport à ξ, de dérivée

$$\frac{\partial g}{\partial\xi}\ :\ (\xi,\eta)\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}na_n\xi^{n-1}$$

ce qui s'écrit de nouveau, pour tout $(\xi,\eta)\in]-1,1[^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial\xi}(\xi,\eta)=\sum_{(n,p)\in\mathbf{N}^2}(n+1)\xi^n\eta^p\mathbf{P}(X=n+1,Y=p)$$

et donc

$$\frac{\partial g}{\partial \xi}(0,0) = \mathbf{P}(X=1, Y=0)$$

On montre par récurrence, de la même manière, que g admet des dérivées partielles à tout ordres, et que, pour tout $(k,\ell) \in \mathbf{N}^2$, pour tout $(\xi,\eta) \in]-1,1[^2$,

$$\frac{\partial^{k+\ell} g}{\partial \xi^k \partial \eta^\ell}(\xi,\eta) = \sum_{(n,p)\in\mathbf{N}^2} \frac{(n+k)!}{n!}\frac{(p+\ell)!}{p!}\xi^n\eta^p\mathbf{P}(X=n+k, Y=p+\ell)$$

et donc

$$\frac{\partial^{k+\ell} g}{\partial \xi^k \partial \eta^\ell}(0,0) = k!\ \ell!\ \mathbf{P}(X=k, Y=\ell)$$

Reste à montrer que les dérivées partielles de g sont continues sur $]-1,1[$. Pour cela, on remarque que si, pour tout $(n,p) \in \mathbf{N}^2$, $\phi_{(n,p)}$ est continue sur $]-1,1[^2$, et si, pour tout compact $K \subset]-1,1[^2$, la famille $(\|\phi_{n,p}|_K\|_\infty)_{(n,p)\in\mathbf{N}^2}$ est sommable, alors pour tout $x \in]-1,1[$ la famille $(\phi_{n,p}(x))_{(n,p)\in\mathbf{N}^2}$ est sommable, et l'application

$$x \longmapsto \sum_{(n,p)\in\mathbf{N}^2} \phi_{n,p}(x)$$

est continue sur $]-1,1[^2$. Bref, un résultat vu dans le cours pour une série de fonctions (la convergence normale sur tout compact « transmet » la continuité) reste vrai pour une famille de fonctions indexée par $\mathbf{N}^2$. Il suffit pour cela de considérer une bijection λ de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N}^2$, qui permet de réindexer la famille de fonctions $(\phi_{n,p})_{(n,p)\in\mathbf{N}^2}$ en une suite de fonctions $\left(\phi_{\lambda(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ et d'appliquer alors le théorème du cours (voir à la fin de l'exercice pour une explication plus complète).
Ici, fixons $(k,\ell) \in \mathbf{N}^2$. Pour chaque $(n,p) \in \mathbf{N}^2$,

$$\phi_{(n,p)}\ :\ (\xi,\eta) \longmapsto \frac{(n+k)!}{n!}\frac{(p+\ell)!}{p!}\xi^n\eta^p\mathbf{P}(X=n+k, Y=p+\ell)$$

est continue sur $]-1,1[^2$. Soit K un compact inclus dans $]-1,1[$, il existe $a \in]0,1[$ tel que $K \subset [-a,a]^2$, ce qui donne

$$\|\phi_{n,p}|_K\|_\infty \leq a^{n+p}\frac{(n+k)!}{n!}\frac{(p+\ell)!}{p!}$$

On montre la sommabilité de cette famille sans problème (c'est une famille produit de deux familles sommables), ce qui permet de conclure.

Théorème qui n'est pas dans le cours, mais...
Soit I un ensemble dénombrable, $(\phi_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions continues sur une partie A d'un evn de dimension finie, à valeurs dans un evn de dimension finie. On suppose que chaque ϕ_i est bornée, et que la famille $(\|\phi_i\|_\infty)_{i\in I}$ est sommable. Alors, pour tout $x \in A$, la famille $(\phi_i(x))_{i\in I}$ est sommable, et l'application

$$\phi \ : \ x \longmapsto \sum_{i\in I} \phi_i(x)$$

est continue sur A.
Démonstration : L'idée n'est pas très compliquée à comprendre : c'est un théorème du cours si $I = \mathbf{N}$. Mais sinon, I étant dénombrable, il y a une bijection de $\mathbf{N}$ sur I, qui permet de se ramener à $I = \mathbf{N}$.
Soit donc $n \mapsto i_n$ une bijection de $\mathbf{N}$ dans I (la notation indexée rend ici les choses plus claires me semble-t-il). On trouve alors des résultats dans le cours sur la sommabilité (appelés « proposition bis ») qui permettent de résoudre le problème. En effet, ces résultats disent :
• $(\|\phi_i\|_\infty)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $\displaystyle\sum_n \|\phi_{i_n}\|_\infty$ converge (et le cas échéant, elles ont même somme, ce qui n'est pas intéressant ici).
• Pour tout $x \in A$, la famille $(\phi_i(x))_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la série $\displaystyle\sum_n \phi_{i_n}(x)$ est absolument convergente. Le cas échéant, elles ont même somme.
Ces deux résultats permettent de ramener le « théorème qui n'est pas dans le cours » au théorème qui l'est, lui, sur la transmission de la continuité par convergence normale.

Exercice 14. [Oral ccp]
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (a) Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
   On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent une loi de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

   (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que $\forall\, m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
   Déterminer la loi de X.