TD mp* : Nombres algébriques

On dira qu'un nombre complexe a est algébrique lorsqu'il existe un polynôme $P \in \mathbf{Q}[X]$ non nul (et, donc, à coefficients rationnels) tel que a soit racine de P ($\widetilde{P}(a) = 0$). On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des nombres complexes algébriques.

1. Soit $a \in \mathcal{A}$. En étudiant la structure de
$$I_a = \{P \in \mathbf{Q}[X] \ / \ \widetilde{P}(a) = 0\}$$
démontrer qu'il existe un unique polynôme unitaire π_a dans $\mathbf{Q}[X]$ tel que l'on ait, pour tout $Q \in \mathbf{Q}[X]$:
$$\widetilde{Q}(a) = 0 \Leftrightarrow \pi_a | Q$$
π_a sera appelé polynôme minimal de a, $d(a) = \deg(\pi_a)$ sera appelé degré de a.
2. Montrer que $\sqrt{2}$ et j sont dans $\mathcal{A}$, et déterminer leurs polynômes minimaux et leurs degrés.
3. Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est dans $\mathcal{A}$, et donner une majoration de son degré.
4. Quels sont les éléments de $\mathcal{A}$ de degré 1 ?
5. Démontrer que, si $a \in \mathcal{A}$, π_a est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.
6. Si $a \in \mathcal{A}$, on note $\mathbf{Q}[a] = \{\widetilde{P}(a) \ ; \ P \in \mathbf{Q}[X]\}$. Montrer que $\mathbf{Q}[a]$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension finie. En utilisant la division euclidienne par π_a, donner une base de cet espace vectoriel constituée de puissances de a. Quel lien y-a-t-il entre la dimension de $\mathbf{Q}[a]$ et $d(a)$?
7. Démontrer que $\mathbf{Q}[a]$ est un corps.
8. On remarque que, si $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L}$ sont deux corps tels que $\mathbf{K} \subset \mathbf{L}$, $\mathbf{L}$ est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ (la loi « externe » étant particulièrement mal nommée, puisque c'est une restriction de la multiplication « interne » sur $\mathbf{L}$:
$$\forall (\lambda, x) \in \mathbf{K} \times \mathbf{L} \qquad \lambda . x = \lambda \times x$$
Soit $\mathbf{K}$,$\mathbf{L}$,$\mathbf{M}$ trois corps tels que $\mathbf{K} \subset \mathbf{L} \subset \mathbf{M}$. On suppose que $\mathbf{L}$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie m, et que $\mathbf{M}$ est un $\mathbf{L}$-espace vectoriel de dimension finie n. Démontrer que $\mathbf{M}$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie nm (on montrera que, si $(e_1, \ldots, e_m)$ est une base du $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{L}$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base du $\mathbf{L}$-espace vectoriel $\mathbf{M}$, alors les $e_i f_j$ forment une base du $\mathbf{K}$-espace vectoriel M).
9. Soit a, b deux nombres complexes algébriques. Démontrer que le sous-$\mathbf{Q}$-espace vectoriel de $\mathbf{C}$ engendré par la famille $(a^k b^l)_{(k,l) \in \mathbf{N}^2}$ (on pourra le noter $\mathbf{Q}[a, b]$) est un $\mathbf{Q}[a]$-espace vectoriel de dimension au plus $d(b)$. En déduire que tous les élements de cet espace vectoriel sont dans $\mathcal{A}$. Conclure que $\mathcal{A}$ est un sous-corps de $\mathbf{C}$.