mp* 2024-2025 : semaine 19 (10/03-14/03)

I Fonctions de plusieurs variables réelles

I.1 Problèmes de continuité

En particulier, étude de la continuité en $(0,0)$ ou de la limite en $(0,0)$ de fonctions de deux variables réelles à l'aide d'un changement de variable en polaires.

I.2 Différentielle, dérivée suivant un vecteur, dérivées partielles

On considère des applications définies sur un ouvert d'un espace vectoriel normé réel de dimension finie à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie
Définition de la différentiabilité et de la différentielle d'une fonction en un point.
Cas d'une fonction de la variable réelle : la diférentiabilité, c'est la dérivabilité, et

$$df(a) \;:\; h \longmapsto hf'(a)$$

Dérivée selon (suivant) un vecteur d'une fonction en un point.
Cas particulier : dérivées partielles relatives à une base, qui sont les dérivées selon (suivant) les vecteurs de la base.
Exercice classique : savoir revenir à la définition pour le calcul des dérivées partielles en $(0,0)$ d'une fonction du type $(x,y) \longmapsto \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, 0 en $(0;0)$(*). Le calcul d'une dérivée partielle n'est pas que du calcul formel, on peut avoir à réécrire :
$\partial_1 f(a,b)$ est si elle existe la dérivée en a de la fonction $t \mapsto f(t,b)$.

I.3 Lien, fonctions C^1, théorème fondamental

Si f est différentiable en a, elle admet des dérivées selon tous vecteurs en a, données par la formule $D_v f(a) = df(a)(v)(*)$.
La réciproque est fausse : une fonction peut admettre des dérivées selon tous vecteurs en a et ne même pas être continue en a.
Fonctions de classe C^1 : ce sont les fonctions différentiables dont la différentielle est continue (i.e. $a \mapsto df(a)$ est continue).
Théorème fondamental (preuve non exigible) : si toutes les dérivées partielles de f (relatives à une base quelconque de E) sont définies et continues sur $\mathcal{U}$, f est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$, et sa différentielle en tout point s'exprime par la formule (notations « évidentes »)

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^{p} h_i \partial_i f(a)$$

I.4 Opérations sur les fonctions différentiables

Si f et g sont différentiables en a, $\alpha f + g$ l'est et...
Si f et g sont différentiables en a, si B est bilinéaire, $x \mapsto B(f(x), g(x))$ l'est et...
Si f est différentiable en a et g en $f(a)$, $x \mapsto g(f(x))$ l'est et...
Composée d'une fonction à valeurs vectorielle d'une variable réelle par une fonction de plusieurs variables : dérivation de $t \longmapsto f(\phi(t))$, expression sous la forme $\mathrm{d}f(\phi(t))(\phi'(t))$, dérivation de $t \longmapsto f\left(\sum_{i=1}^{n} \phi_i(t) e_i\right)$ en fonction des dérivées partielles de f.
Application : calcul des dérivées partielles d'une fonction composée.
On doit donc savoir écrire, à l'aide de celles de f et g, les dérivées partielles de

$$(u_1, \ldots, u_p) \mapsto f(g_1(u_1, \ldots, u_p), \ldots, g_n(u_1, \ldots, u_p))$$

Autre application : $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_0^1 df(\gamma(t))(\gamma'(t))dt$ lorsque γ est un « arc C^1 tracé dans $\mathcal{U}$ » tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.
Caractérisation de la différentiabilité d'une fonction par celle des fonctions composantes.

I.5 Fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles

Définition et calcul du gradient si l'espace de départ est euclidien.
Lien entre gradient et différentielle.
Le gradient est colinéaire au vecteur unitaire suivant lequel la dérivée de f (supposée bien sûr différentiable) est maximale, et est de même sens que ce vecteur(*).

I.6 Condition nécessaire d'extremum local

Point critique, condition nécessaire d'extremum en un point d'un ouvert pour une fonction différentiable définie sur cet ouvert.

I.7 Dérivées partielles d'ordre ≥ 2

Définition, classe C^k, théorème de Schwarz.
Formule de Taylor-Young pour une fonction C^2 sur un ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie, à valeurs réelle. Condition suffisante de maximum (resp. de minimum) et de non maximum (resp....) en un point critique.
Vecteurs tangents en un point à une partie d'un espace vectoriel normé de dimension

finie. Cas particulier (le plus important) d'une partie d'un espace euclidien définie par une équation $g(x) = k$, en un point où ∇g n'est pas nul.
Si f et g sont de classe C^1 sur un ouvert d'un espace de dimension finie, si
$X = \{x \; ; \; g(x) = 0\}$, si la restriction de f à X atteint un extremum en a, et si $\nabla g(a) \neq 0$, alors...(condition nécessaire d'extremum « sous contrainte »).
Matrice jacobienne.
On doit savoir calculer des dérivées patielles secondes de fonctions composées, par exemple savoir calculer un laplacien en polaires, faire des calculs avec un changement de variable suggéré par l'énoncé pour résoudre des équations au dérivées partielles.

II Systèmes différentiels, équations différentielles

II.1 Résultats généraux

Théorème (d'existence et d'unicité, ou de Cauchy-Lipschitz linéaire)
Si J est un intervalle de $\mathbf{R}$, A et B deux applications continues sur J, à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ respectivement, $t_0 \in J$, $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, alors le « problème de Cauchy »

$$\begin{cases} \forall t \in J \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

a une solution X unique.
Notons (E) l'équation « complète » $X' = A(t)X + B(t)$, (H) l'équation « homogène associée » : $X' = A(t)X$, S_E (resp. S_H) l'ensemble des solutions de (E) (resp. de (H)).
Si A et B sont continues sur l'intervalle J, alors S_H est un sev de $\mathcal{C}^1(J, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$, et $\dim(S_H) = n$. S_E un sea de $\mathcal{C}^1(J, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ de direction S_H donc de dimension n.
On appelle système fondamental de solutions de l'équation homogène toute base $(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ de S_H. Si on possède un tel système fondamental, on cherche une solution de (E) sous la forme $t \longmapsto \lambda_1(t)\Phi_1(t) + \cdots + \lambda_n(t)\Phi_n(t)$ (méthode de variation des constantes) où les λ_i sont des fonctions inconnues, dérivables sur J, à valeurs dans $\mathbf{K}$.

II.2 Equations linéaires scalaires d'ordre 2

Si a, b, c, d sont continues sur I, à valeurs dans $\mathbf{K}$, si a ne s'annule pas sur I, si $t_0 \in I$, $(x_0, x_0') \in \mathbf{K}^2$, il existe une solution unique ϕ de l'équation $a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t)$ définie sur I et telle que $\phi(t_0) = x_0$ et $\phi'(t_0) = x_0'$.
Notant (H) l'équation $a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0$ et S_H l'ensemble de ses solutions sur I, si on suppose que a, b, c sont continues sur I et que a ne s'annule pas, alors S_H est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(I, \mathbf{K})$.
Si on suppose que a, b, c, d sont continues sur I et que a ne s'annule pas sur I, l'ensemble S_E des solutions de l'équation $(E) \; : \; a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^2(I, \mathbf{K})$ de dimension 2, de direction S_H.
Si ϕ, ψ sont deux solutions de (H) sur I, on définit sur I leur wronskien :

$$w \; : \; t \longmapsto \phi(t)\psi'(t) - \psi(t)\phi'(t)$$

On suppose toujours que a, b, c sont trois fonctions continues sur I, a ne s'annulant pas sur I. On note $w = w(\phi, \psi)$. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) (ϕ, ψ) est une base de S_H. **(ii)** $\forall t \in I \quad w(t) \neq 0$. **(iii)** $\exists t \in I \quad w(t) \neq 0$.
Supposons connu un système fondamental (ϕ, ψ) de solutions de (H) (i.e. une base de S_H, i.e. deux solutions ϕ et ψ de (H) telles que $w(\phi, \psi) \neq 0$) ; la méthode de variation de la constante consiste en la recherche d'une solution f de (E) sous la forme

$$f \; : \; t \longmapsto \lambda(t)\phi(t) + \mu(t)\psi(t)$$

(où λ et μ sont deux fonctions inconnues, supposées au moins deux fois dérivables) avec la condition additionnelle

$$\forall t \in I \quad \lambda'(t)\phi(t) + \mu'(t)\psi(t) = 0$$

Méthode de variation de la constante pour la recherche d'une deuxième solution de (H) lorsqu'on en connaît déjà une.

II.3 Equations linéaires scalaires d'ordre n

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire dans ce cas, structure de l'ensemble des solutions.

II.4 Equations linéaires scalaires d'ordre 1

soit J un intervalle de $\mathbf{R}$, a, b et c trois applications continues sur J, à valeurs dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On suppose que $\forall x \in J \quad a(x) \neq 0$. Si $x_0 \in J$ et $y_0 \in \mathbf{K}$, il existe une solution unique ϕ de l'équation $a(x)y' + b(x)y = c(x)$, définie sur J et prenant en x_0 la valeur y_0.
On nomme (E) l'équation « complète » $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ et
(H) l'équation « homogène associée » : $a(x)y' + b(x)y = 0$.
On note S_E l'ensemble des solutions de (E), S_H l'ensemble des solutions de (H). Si a, b, c : $J \longrightarrow \mathbf{K}$ sont continues sur l'intervalle J, et si a ne s'annule pas sur J, alors S_H est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathcal{C}^1(J, \mathbf{K})$. L'ensemble S_E des solutions de l'équation « complète » (E) est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(J, \mathbf{K})$, de direction S_H, donc de dimension 1.
Si ϕ est une solution de l'équation (H), non nulle (donc ne s'annulant pas) on cherche alors une solution de (E) sous la forme $x \longmapsto \alpha(x)\phi(x)$ (variation de la constante).

II.5 Systèmes linéaires à coefficients constants

Système $X' = AX + B(t)$: résolution de l'équation homogène avec l'exponentielle de matrice, résolution de l'équation complète par la variation de la constante.
Système $X' = AX + B(t)$ dans le cas où A est diagonalisable : expression des solutions à partir d'une base $(V_1, \ldots, V_n)$ de vecteurs propres de A (écrits en matrices colonnes).
Il est vivement conseillé, surtout aux candidat(e)s X-ens, de regarder l'aspect vectoriel, mais au programme de colle ne figure que l'aspect matriciel.