mp* 2024-2025 : semaine 18 (10/02-14/02)

I Séries dans un espace vectoriel normé de dimension finie

I.1 Généralités

Extension des définitions aux espaces vectoriels normés de dimension finie : sommes partielles, convergence, divergence, restes en cas de convergence.
Condition nécessaire de convergence ; divergence grossière.
La série $\sum u_n$ dans l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est dite absolument (non pas normalement !) convergente lorsque $\sum \|u_n\|$ converge. La convergence absolue implique la convergence (preuve non exigible).

I.2 Exemple fondamental : exponentielle de matrice, exponentielle d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie

Définition de $\exp(u)$, $\exp(A)$.
Propriété $\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$(*).
Dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, les valeurs propres de $\exp(A)$ sont les exponentielles des valeurs propres de A(*).
La propriété $\exp(A+B) = \exp(A)\ \exp(B)$ si $AB = BA$, $\exp(u+v) = \exp(u) \circ \exp(v)$ si $u \circ v = v \circ u$ est admise. On en déduit que $\exp(A) \in GL_n(\mathbf{K})$, d'inverse…

II Dérivation et intégration sur un segment…

…des fonctions à valeurs dans un evn de dimension finie.
Extension rapide des résultats vus auparavant pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes.
Nouvelle propriété : si $u \in L(E,F)$, $(u \circ f)'(t) = u(f'(t))$.
Nouvelle propriété : si $u \int L(E,F)$, $u\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) = \int_a^b u\,(f(t))\,\mathrm{d}t$.
Dérivée d'un produit, intégration par parties : extension à $B(f,g)$ où B est bilinéaire.

III Suites et séries de fonctions dans les evn de dimension finie

III.1 Convergence

Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions définies sur une partie A d'un evn de dimension finie, à valeurs dans un evn de dimension finie.

III.2 Transmission de la continuité

Par convergence uniforme, éventuellement sur tout compact.

III.3 Théorème de la double limite

III.4 Approximation

Toute fonction continue par morceaux sur un segment de $\mathbf{R}$, à valeurs dans un evn de dimension finie, est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.

III.5 Convergence d'une série de fonctions

Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale. La convergence normale implique la convergence uniforme.
Transmission de la continuité par convergence uniforme sur tout compact, théorème de la double limite.
l'exponentielle est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, sur $L(E)$(*).

III.6 Intégration d'une suite ou d'une série de fonctions

Dans le cas de convergence uniforme sur un segment, on peut intervertir limite et intégrale, « série » et intégrale.

III.7 Suite et série de fonctions de classe C^1

Extension des théorèmes déjà vus.
$t \mapsto \exp(tA)$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, sa dérivée est $t \mapsto A\exp(tA) = \exp(tA)A$(*). Résultat analogue pour les endomorphismes.

IV Séries entières d'une variable complexe

Réviser le chapitre sur les séries entières…
La convergence d'une série entière est uniforme (car normale) sur tout compact inclus dans le disque ouvert de convergence, la somme d'une série entière est donc continue sur ce disque ouvert.
Pas de dérivation des fonctions d'une variable complexe au programme, chapitre court, donc.