mp* 2023-2024 : semaine 17 (12/02-16/02)

Fonctions de plusieurs variables réelles

I Problèmes de continuité

En particulier, étude de la continuité en $(0,0)$ ou de la limite en $(0,0)$ de fonctions de deux variables réelles à l'aide d'un changement de variable en polaires.

II Différentielle, dérivée suivant un vecteur, dérivées partielles

On considère des applications définies sur un ouvert d'un espace vectoriel normé réel de dimension finie à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie
Définition de la différentiabilité et de la différentielle d'une fonction en un point.
Cas d'une fonction de la variable réelle : la diférentiabilité, c'est la dérivabilité, et

$$df(a)\ :\ h \longmapsto hf'(a)$$

Dérivée selon (suivant) un vecteur d'une fonction en un point.
Cas particulier : dérivées partielles relatives à une base, qui sont les dérivées selon (suivant) les vecteurs de la base.
Exercice classique : savoir revenir à la définition pour le calcul des dérivées partielles en $(0,0)$ d'une fonction du type $(x,y) \longmapsto \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, 0 en $(0;0)$(*). Le calcul d'une dérivée partielle n'est pas que du calcul formel, on peut avoir à réécrire :
$\partial_1 f(a,b)$ est si elle existe la dérivée en a de la fonction $t \mapsto f(t,b)$.

III Lien, fonctions C^1, théorème fondamental

Si f est différentiable en a, elle admet des dérivées selon tous vecteurs en a, données par la formule $D_v f(a) = df(a)(v)(*)$.
La réciproque est fausse : une fonction peut admettre des dérivées selon tous vecteurs en a et ne même pas être continue en a.
Fonctions de classe C^1 : ce sont les fonctions différentiables dont la différentielle est continue (i.e. $a \mapsto df(a)$ est continue).

Théorème fondamental (preuve non exigible) : si toutes les dérivées partielles de f (relatives à une base quelconque de E) sont définies et continues sur $\mathcal{U}$, f est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$, et sa différentielle en tout point s'exprime par la formule (notations « évidentes »)

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^{p} h_i \partial_i f(a)$$

IV Opérations sur les fonctions différentiables

Si f et g sont différentiables en a, $\alpha f + g$ l'est et...
Si f et g sont différentiables en a, si B est bilinéaire, $x \mapsto B(f(x), g(x))$ l'est et...
Si f est différentiable en a et g en $f(a)$, $x \mapsto g(f(x))$ l'est et...
Composée d'une fonction à valeurs vectorielle d'une variable réelle par une fonction de plusieurs variables : dérivation de $t \longmapsto f(\phi(t))$, expression sous la forme $\mathrm{d}f(\phi(t))(\phi'(t))$, dérivation de $t \longmapsto f\left(\sum_{i=1}^{n} \phi_i(t) e_i\right)$ en fonction des dérivées partielles de f.
Application : calcul des dérivées partielles d'une fonction composée.
On doit donc savoir écrire, à l'aide de celles de f et g, les dérivées partielles de

$$(u_1, \ldots, u_p) \mapsto f(g_1(u_1, \ldots, u_p), \ldots, g_n(u_1, \ldots, u_p))$$

Autre application : $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_0^1 df(\gamma(t))(\gamma'(t))dt$ lorsque γ est un « arc C^1 tracé dans $\mathcal{U}$ » tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.
Caractérisation de la différentiabilité d'une fonction par celle des fonctions composantes.

V Fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles

Définition et calcul du gradient si l'espace de départ est euclidien.
Lien entre gradient et différentielle.
Le gradient est colinéaire au vecteur unitaire suivant lequel la dérivée de f (supposée bien sûr différentiable) est maximale, et est de même sens que ce vecteur(*).

VI Condition nécessaire d'extremum local

Point critique, condition nécessaire d'extremum en un point d'un ouvert pour une fonction différentiable définie sur cet ouvert.

VII Dérivées partielles d'ordre ≥ 2

Définition, classe C^k, théorème de Schwarz.
Formule de Taylor-Young pour une fonction C^2 sur un ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie, à valeurs réelle. Condition suffisante d'extremum et de non extremum en un point critique.
Vecteurs tangents en un point à une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie. Cas particulier (le plus important) d'une partie d'un espace euclidien définie par une équation $g(x) = k$, en un point où ∇g n'est pas nul.
Si f et g sont de classe C^1 sur un ouvert d'un espace de dimension finie, si
$X = \{x \; ; \; g(x) = 0\}$, si la restriction de f à X atteint un extremum en a, et si $\nabla g(a) \neq 0$, alors…(condition nécessaire d'extremum « sous contrainte »).
Matrice jacobienne.