mp* 2023-2024 : semaine 16 (05/02-09/02)

C'est le programme pour la colle et pour le DS.

I Ab1 : Espaces préhilbertiens réels

I.1 Produits scalaires

Produit scalaire sur un espace vectoriel réel.

Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité(*).

Norme dite « euclidienne » associée à un produit scalaire.

Produits scalaires usuels sur l'espace des fonctions continues sur un segment, sur $\mathbf{R}^n$.

Identité de polarisation.

Vecteurs orthogonaux, familles orthogonales. Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Vecteurs unitaires. Famille orthonormale.

I.2 sous-espaces orthogonaux, projection orthogonale

Sous-espaces orthogonaux.

Théorème de Pythagore.

Orthogonal d'un sev. Sous-espaces supplémentaires orthogonaux.

En général, l'orthogonal d'un sev n'est pas un supplémentaire de ce sev.

Théorème de projection orthogonale sur un sev de dimension finie d'un espace de dimension quelconque, distance d'un vecteur à un tel sev, inégalité de Bessel.

En dim. finie (euclidien), existence de bases orthonormales, méthode de Schmidt, écriture de cette méthode à l'aide de la projection orthogonale : formule

$$f_{n+1} = \frac{1}{\|e_{n+1} - p_{F_n}(e_{n+1})\|} (e_{n+1} - p_{F_n}(e_{n+1}))$$

II Ab2 : Espaces euclidiens (début)

II.1 Généralités

Toute forme linéaire sur un espace euclidien s'écrit de manière unique $x \mapsto (a|x)$.

Équivalence, pour un endomorphisme, de la conservation de la norme et du produit scalaire.

Isométries vectorielles (on utilise aussi le terme « automorphismes orthogonaux »); matrices orthogonales.

Groupes $\mathcal{O}(E)$, $\mathcal{SO}(E)$, $\mathcal{O}(n)$, $\mathcal{SO}(n)$.

Les matrices orthogonales sont les matrices de passage entre bases orthonormales.

Les matrices orthogonales sont les matrices dont la famille des vecteurs colonnes est orthonormale.

Les isométries vectorielles sont les endomorphismes qui transforment base orthonormale en base orthonormale.

Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale, $u \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}(n)$.

Description de $\mathcal{O}(2)$ et de $\mathcal{SO}(2)$.

Un exercice à savoir (bien) faire : $\mathcal{O}(n)$ est compact(*).

II.2 Endomorphismes autoadjoints

Définition. On utilise aussi le terme « endomorphisme symétrique »

Un projecteur est orthogonal si et seulement si il est autoadjoint(*).

Théorème spectral (réduction des matrices symétriques réelles et des endomorphismes symétriques en base orthonormale). Trois exercices à connaître (*) :

Formule « variationnelle » pour la plus grande valeur propre d'un endomorphisme symétrique, $\sup_{x \neq 0_E} \frac{(x|u(x))}{\|x\|^2} = \max(\text{Sp}(u))$.

Équivalence pour u symétrique entre $\text{Sp}(u) \subset \mathbf{R}^+$ et $\forall x \quad (x|u(x)) \geq 0$ (c'est en fait une question de cours).

Existence d'une « racine carrée » symétrique positive pour toute matrice symétrique positive.

II.3 Réduction des isométries vectorielles

a. Cas général

Un sev est stable par une isométrie vectorielle si et seulement si son orthogonal l'est.

Théorème de réduction des isométries vectorielles en base orthonormale(*).

b. Dimension 2 et 3

Orientation d'un espace vectoriel réel, d'un espace euclidien ; bases directes, indirectes ou inverses.

Définition du « produit mixte » (la terminologie a disparu du programme, mais pas l'idée).
Description de $O(2)$. Classification des isométries vectorielles du plan. *La notion d'angle d'une rotation dans un plan euclidien orienté n'est plus vraiment au programme.*

Dans l'espace de dimension 3 : rotations, réduction. *Mais on ne demande pas de savoir-faire à ce sujet.*

Le produit vectoriel n'est plus au programme, mais il est utilisé en Physique. On a parfaitement le droit de l'utiliser si on souhaite, à partir de deux vecteurs orthogonaux, construire une base orthogonale ou orthonormale d'un espace euclidien de dimension 3.

III Séries dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Révisions, surtout les exponentielles de matrices.

IV Dérivation et intégration sur un segment des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Révisions de C3,1 C4,1 et C5,1.

V Suites et séries de fonctions dans les evn de dimension finie

Révisions

VI Topologie

Révisions, surtout compacité et continuité des applications linéaires.