

I P1-P2 : Espaces probabilisés

I.1 Espace probabilisable

Définition d'une tribu sur un ensemble Ω . Propriétés de stabilité (par complémentaire, intersection finie ou dénombrable, union finie ou dénombrable).

L'étude des tribus n'est pas, comme on dit, un objectif du programme.

I.2 Probabilités

Définition d'une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

Cas d'un Ω fini ou dénombrable : les probabilités des événements élémentaires déterminent alors la probabilité. Plus précisément, étant donnée une famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de réels positifs, sommable et de somme 1, il existe une unique probabilité P telle que...

Croissance.

Probabilité d'une réunion de deux événements.

Probabilité d'une réunion croissante : « continuité croissante ».

Corollaire : $P\left(\bigcup_{n=0}^N A_n\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)$.

Réunion quelconque : majoration de la probabilité d'une réunion.

Probabilité d'une intersection décroissante (« continuité décroissante »).

Événements presque sûrs, événements négligeables.

I.3 Conditionnement, indépendance

Probabilité d'un événement A sachant un événement B ($P(B) > 0$). P_B est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Formule des probabilités composées.

Formule des probabilités totales.

Formule de Bayes (probabilité des causes).

Événements mutuellement indépendants. Stabilité par passage au complémentaire.

II P3 : Variables aléatoires discrètes

II.1 Définitions

Définition d'une variables aléatoire discrète.

Une fonction d'une variable aléatoire discrète (il s'agit donc en fait d'une composition : $f \circ X$, qui est noté $f(X)$) est une variable aléatoire discrète.

Loi d'une v.a. discrète. Donner la loi, c'est donner $X(\Omega)$ et, pour tout $x \in X(\Omega)$, donner $P(X = x)$.

II.2 Loi géométrique

Sur $\mathbf{N}_*$: $P(X = n) = q^{n-1}p$.

Simplicité de l'expression de $P(X > n)$, $n \in \mathbf{N}$.

II.3 Lois finies usuelles

Loi uniforme sur un ensemble fini.

Loi de Bernoulli. Exemple : l'indicatrice d'un événement est une variable de Bernoulli.

Loi binomiale.

II.4 Couple de variables aléatoires indépendantes

Loi de Y sachant $X = x$ si $P(X = x) \neq 0$.

Autres exemples de lois conditionnelles.

Couple de v.a. indépendantes, différentes caractérisations.

Si X et Y sont indépendantes, $f(X)$ et $g(Y)$ le sont.

II.5 Amnésie de la loi géométrique

Les lois géométriques sont les uniques lois sur $\mathbf{N}_*$ vérifiant pour tous n, k :

$$P(X > n + k | X > n) = P(X > k)$$

III P4 : Espérance, moments (variables aléatoires réelles discrètes)

III.1 Espérance, transfert

Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe, définie par

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)x$$

lorsque la famille est sommable. Si la famille n'est pas sommable et si la variable est à valeurs positives, on définit $\mathbf{E}(X) = +\infty$. Si la famille n'est pas sommable et si la variable n'est pas positive, on dit qu'elle n'a pas d'espérance.

Espérance d'une loi géométrique(*).

Si X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, alors $\mathbf{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq n)$ (*)
(pour la preuve, on supposera évidemment que X est à valeurs dans $\mathbf{N}$).

Transfert : si X est une v.a. discrète à valeurs réelles, si f est une fonction à valeurs réelles ou complexes, $f(X)$ a une espérance si et seulement si la famille $(\mathbf{P}(X = x) f(x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable, et dans ce cas $\mathbf{E}(f(X)) = \dots$.

On retrouve, dans le cas d'un univers dénombrable ou fini, l'écriture de l'espérance vue en mpsi.

III.2 Propriétés

Si $|X| \leq Y$, si Y a une espérance, X a une espérance.

Positivité de l'espérance.

Linéarité de l'espérance.

III.3 Moments, variance

Moments d'une variable aléatoire réelle discrète (v.a.r.d. dans la suite).

Si une v.a.r.d. a un moment d'ordre 2, elle est d'espérance finie.

Inégalité de Cauchy-Schwarz(*).

Espace vectoriel des v.a.r.d. ayant un moment d'ordre 2. Notation L^2 .

Variance, écart-type.

Formules : $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2$, $\mathbf{V}(aX + b) = a^2 \mathbf{V}(X)$ (*).

Variable centrée réduite.

Variance d'une loi géométrique(*).

Covariance de deux v.a.r.d. ayant des moments d'ordre 2. Formule.

Variance d'une somme de deux v.a.r.d. ayant des moments d'ordre 2.

Si X et Y sont deux v.a.r.d. indépendantes ayant des espérances finies, alors XY a une espérance finie, et $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X) \mathbf{E}(Y)$.

Covariance d'une somme de deux v.a.r.d. indépendantes, variance de la somme de deux v.a.r.d. indépendantes.

Variance de la somme de n v.a.r.d. ; variance de la somme de v.a.r.d. deux à deux indépendantes.

III.4 Markov, Bienaymé-Tchebychev

Inégalité de Markov : si X est d'espérance finie, si $a > 0$, $P(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}(|X|)}{a}$.

Démonstration en utilisant une (ou des) indicatrices d'évènements(*).

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev(*).

Loi faible des grands nombres : pour une suite de variables aléatoires indépendantes 2 à 2, équidistribuées, ayant un moment d'ordre 2(*).