mp* 2023-2024 : semaine 8 (20/11-24/11)

I C4 : Intégration sur un segment (fonctions numériques)

Bref rappel sur la définition de l'intégrale, rien n'est exigible sur la construction de l'intégrale.

Intégrale d'une fonction en escalier, d'une fonction continue par morceaux.
Linéarité, positivité, $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.
Sommes de Riemann (pour des subdivisions de pas constant).

II C5 : Dérivation et intégration

Ici aussi, on considère des fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur un intervalle.
Théorème fondamental du calcul différentiel : si f est continue sur l'intervalle I, a un point de I, alors $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
Dérivation de $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$ en utilisant une primitive de f(*).
Intégration par parties, changement de variable dans une intégrale sur un segment.
Inégalité des accroissements finis.
Formule de Taylor avec reste sous forme intégrale, inégalité de Taylor-Lagrange.

III C7 : Intégrale sur un intervalle quelconque

Les fonctions sont à valeurs réelles ou complexes.
Convergence d'une intégrale généralisée.
Intégrabilité d'une fonction, i.e. « absolue convergence » de son intégrale. Elle implique la convergence.
Intégrales de Riemann sur divers intervalles, détermination de l'intégrabilité par comparaison.
Intégrale généralisée convergente non absolument convergente : exemple typique de $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ sur $]0, +\infty[$(*).

Utilisation de l'intégration par parties (avec précautions) et du changement de variable (qui est légitime dès lors qu'il s'agit d'une bijection de classe C^1). Le programme autorise les changements de variables affines, puissances, logarithmes, exponentielles sans justification, mais il vaut mieux justifier le changement de variable dès lors qu'il n'est pas affine.
Le changement de variable peut permettre de démontrer l'existence d'une intégrale car il ne change pas sa nature.

IV C8 : Intégrales dépendant d'un paramètre

Les fonctions sont à valeurs réelles ou complexes.
Théorème de convergence dominée pour une suite $\left(\int_I f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$.
Interversion séries/intégrales. Deux théorèmes :
Si $\sum f_n$ converge simplement, et les f_n sont intégrables, et $\sum N_1(f_n)$ converge...
Nouveau au programme : si les f_n sont positives, intégrables, si $\sum f_n$ converge simplement (et si tout est continu par morceaux), alors $\sum \int f_n = \int \left(\sum f_n\right)$ dans $\mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$, ce qui donne un critère d'intégrabilité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
Théorème de continuité d'une fonction

$$x \to \int_I f(x,t)\ dt$$

(x est une variable réelle décrivant une partie A de $\mathbf{R}$) avec domination, éventuellement sur tout segment inclus dans A lorsque A est un intervalle, ce qui est majoritairement le cas dans la pratique.
Classe C^1, dérivation sous le signe $\int$ des fonctions

$$x \to \int_I f(x,t)\ dt$$

Le programme insiste sur le fait qu'on ne pénalise pas l'oubli des hypothèses de continuité par morceaux (évidemment, c'est surtout à l'écrit que cela compte).
Extension à la classe C^k.
Application de ces techniques à l'étude de la fonction Γ(*) (savoir refaire, pas de résultats à retenir par cœur).