mp* 2023-2024 : semaine 6 (6/11-10/11)

I Al1, Al2, Al3 : Espaces vectoriels, applications linéaires, matrices, déterminants

Révisions.

II Ag1, Ag2, Ag3 : Groupes, anneaux, corps, groupe linéaire, polynômes

Révisions : sur ces chapitres, bien connaître le cours doit être suffisant.

III Al 4,5,6 : réduction

III.1 Elements propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

Valeurs, vecteurs, sous-espaces propres d'un endomorphisme ou d'une matrice.
Un vecteur (non nul) est propre pour u si et seulement si la droite qu'il engendre est stable par u.
En dimension finie seulement, définition du spectre d'un endomorphisme comme l'ensemble de ses valeurs propres. Spectre d'une matrice.
Polynôme caractéristique d'une matrice ou d'un endomorphisme en dimension finie :
Définition officielle : $P_a(X) = \det(XI - a)$.
Quelques coefficients : $P_A(X) = X^n - \mathrm{Tr}(a)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n\det(a)$.
Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique ; Définition de la multiplicité d'une valeur propre.
Majoration du nombre de valeurs propres comptées avec leur multiplicité.
Valeurs propres d'une matrice triangulaire.
Dans le cas où le polynôme caractéristique est scindé, lien entre la somme des valeurs propres et la trace, entre le produit des valeurs propres et le déterminant.

III.2 Diagonalisabilité

a. Préliminaire

Des sous-espaces propres $E_1,\ldots,E_p$ associés à des valeurs propres deux à deux distinctes (pour un endomorphisme u) sont en somme directe (*).
Une famille (finie ou infinie, peu importe) de vecteurs propres de u associées à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre(*).

b. Diagonalisabilité d'un endomorphisme

Définition : l'endomorphisme u est diagonalisable lorsqu'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale, i.e. lorsqu'il existe une base constituée de vecteurs propres.
Caractérisation : u est diagonalisable si et seulement si l'espace est somme directe des sous-espaces propres, si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace.
Lemme : la dimension d'un sous-espace propre est inférieure ou égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante(*).
Caractérisation : u est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique est scindé et la dimension de chaque sous-espace propre égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante(*).
Condition suffisante de diagonalisabilité : si le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, l'endomorphisme est diagonalisable et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles(*).
Autre formulation : si $\dim(E) = n$, si $u \in L(E)$, il suffit que u ait n valeurs propres distinctes pour être diagonalisable.

c. Diagonalisabilité d'une matrice

Diagonalisabilité des matrices ; interprétation de P dans la relation

$$A = PDP^{-1}$$

comme matrice de passage de la base canonique à une base formée de vecteurs propres de A (l'ordre des vecteurs propres en question, i.e. des colonnes de P, correspond à l'ordre des valeurs propres sur la diagonale de D).
Une question classique : une matrice diagonalisable qui a une unique valeur propre est…(*).

III.3 Polynômes d'endomorphismes et de matrices

Polynômes de matrices et d'endomorphismes : définition, propriétés.
Définition de $\mathbf{K}[a]$.

Polynômes annulateurs, polynôme minimal. Un endomorphisme d'un espace qui n'est pas de dimension finie peut ne pas admettre de polynôme minimal.
Base et dimension de $\mathbf{K}[a]$ en fonction du degré du polynôme minimal(*).
Théorème (ou lemme) de décomposition des noyaux(*).

III.4 Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

Si P est annulateur de u, toute vp de u est racine de P(*).
Les valeurs propres sont les racines du polynôme minimal(*).
Dernière caractérisation : u est diagonalisable si et seulement si u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, si et seulement si le polynôme minimal de u est scindé à racines simples(*).

III.5 Stabilité

a. Stabilité, endomorphisme induit, polynômes minimaux et caractéristiques

Définition de la stabilité d'un sous-espace par un endomorphisme. Caractérisation dans une base adaptée.
Si F est stable par u, on note u_F l'endomorphisme induit sur F par u.
Le polynôme caractéristique de u_F divise celui de u,
Le polynôme minimal de u_F divise celui de u(*).
Si u est diagonalisable, et si F est stable par u, alors u_F est diagonalisable.
Endomorphisme laissant stables les facteurs d'une somme directe « supplémentaire » : Caractérisation matricielle dans une base adaptée ; Polynôme minimal, polynôme caractéristique de u en fonction des poynômes minimaux et caractéristiques des endomorphismes induits.

b. Stabilité et commutation

Si deux endomorphismes commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre(*).
Exercice à savoir faire : diagonalisation simultanée de deux endomorphismes diagonalisables qui commutent(*).

III.6 Le théorème de Cayley-Hamilton

Démonstration non exigible.

III.7 Trigonalisabilité

Définition (pour un endomorphisme, pour une matrice).
Caractérisation : une matrice (un endomorphisme) est diagonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé, si et seulement si son polynôme minimal est scindé, si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. Démonstration par récurrence(*)....

III.8 Nilpotence

Définition, indice de nilpotence.
Être nilpotent, c'est être trigonalisable avec pour seule valeur propre 0(*).
L'indice de nilpotence est inférieur ou égal à la dimension(*).

III.9 Sous-espaces caractéristiques

On suppose dans cette section que le polynôme caractéristique est scindé. Définition des sous-espaces caractéristiques. Propriétés : ils sont stables par u(*), sont en somme directe et leur somme est l'espace entier(*), ils contiennent les sous-espaces propres(*), sont de dimension...(*) (démonstrations importantes).
Dans une base convenable, la matrice d'un endomorphisme à polynôme caractéristique scindé est triangulaire et diagonale par blocs, chaque bloc n'ayant sur sa diagonale que des coefficients égaux.