mp* 2023-2024 : semaine 3 (02/10-06/10)

I Al1 : Espaces vectoriels, applications linéaires

Révision du programme précédent.

II AL2 : Matrices

II.1 Opérations

Produit matriciel AB, en particulier interprété comme le produit par A des colonnes de B.
Structures sur les ensembles de matrices : espace vectoriel $(M_{n,p}(\mathbf{K}), +, .)$, anneau (non intègre) $(M_n(\mathbf{K}), +, \times)$, groupe(non commutatif) $(GL_n(\mathbf{K}), \times)$.
Produit par blocs.
Base canonique, table de multiplication des matrices de cette base.

II.2 Matrices et applications linéaires

Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases, matrice d'un endomorphisme relativement à une base.
Des choix de bases permettent de définir un isomorphismes d'espaces vectoriels entre $L(E, F)$ et $M_{n,p}(\mathbf{K})$, entre $L(E)$ et $M_n(\mathbf{K})$.
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Isomorphisme d'algèbres entre $L(E)$ et $M_n(\mathbf{K})$.
Calcul matriciel de l'image d'un vecteur par une application linéaire ($Y = AX$).
Application linéaire canoniquement associée à une matrice, endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée.
Image, noyau d'une matrice.
Inversibilité d'une matrice carrée : l'inversibilité à droite ou à gauche suffit.

II.3 Matrices remarquables

Matrices diagonales, triangulaires supérieures ou inférieures : dimensions de ces sous-espaces.
Transposition, transposée d'un produit, transposée de l'inverse.
Matrices symétriques et antisymétriques.

II.4 Changement de base

Matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base, matrice de passage d'une base à une base.
Formules de changement de base(s) : pour la matrice d'un vecteur, pour la matrice d'une application linéaire, pour la matrice d'un endomorphisme.

II.5 Opérations élémentaires

Définition des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice.
Il faut savoir retrouver les matrices carrées ($T_{i,j}(\lambda)$, $P_{i,j}$, $D_i(\lambda)$) par quoi multiplier A à gauche ou à droite pour produire ces opérations élémentaires.

II.6 Rang

Rang d'une matrice, rang d'une famille de vecteurs.
Le rang d'une application linéaire est celui de sa matrice dans des bases quelconques.
Le rang n'est pas modifié par multiplication à droite ou à gauche par une matrice carrée inversible.
Une matrice A est de rang r si et seulement si elle s'écrit $A = PJ_rQ$ où P et Q sont inversibles et J_r matrice canonique de rang r et de même format que A.
Rang de la matrice transposée ; conséquence : le rang de la famille des vecteurs lignes est celui de la famille des vecteurs colonnes.
Le rang d'une matrice est le « format » maximal d'une matrice carrée inversible extraite de cette matrice.

II.7 Trace

Trace d'une matrice, propriétés (linéarité, trace d'un produit).
Trace d'un endomorphisme en dimension finie, propriétés.
La trace d'un projecteur est égale à son rang(*).

III S3 : Suites de fonctions numériques

Pour l'instant, on reste dans le cadre des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbf{R}$*, à valeurs dans* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

III.1 Convergence simple, convergence uniforme

Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions définies sur un intervalle de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles ou complexes.
Norme $\|.\|_\infty$ sur $B(A, \mathbf{K})$ où A est une partie non vide de $\mathbf{R}$. Il faut savoir rédiger correctement l'inégalité triangulaire(*).

III.2 Transmission

Si une suite de fonctions bornées converge uniformément, sa limite est une fonction bornée(*).
Transmission de la continuité par convergence uniforme. *(**) se pose à l'oral cc-inp comme exercice à 8 points ...*
Convergence uniforme sur tout segment pour une suite de fonctions définies sur un intervalle de $\mathbf{R}$, elle suffit à transmettre la continuité.
Théorème de la double limite (admis). Ici, la convergence uniforme sur tout segment ne suffit pas.

III.3 Théorèmes d'approximation

Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier (on se contentera de l'idée de la preuve pour des fonctions continues).
Théorème de Weierstrass : approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment à valeurs réelles ou complexes par des fonctions polynômes sur ce segment (démonstration hors programme).
Le théorème de Weierstrass « trigonométrique » est hors-programme.

IV S4 : Séries de fonctions numériques

IV.1 Convergence des séries de fonctions

Convergence simple, uniforme, normale.
Pour une série simplement convergente, caractérisation de la convergence uniforme par la convergence uniforme de la suite des restes.
Exemple : application de la majoration du reste dans le théorème sur les séries alternées pour montrer qu'une convergence est uniforme.
La convergence normale implique la convergence uniforme(*).

IV.2 Transmission

Transmission du caractère borné par convergence uniforme.
Transmission de la continuité par convergence uniforme, par convergence uniforme sur tout segment.
Théorème de la double limite. Exemples d'utilisation pour montrer qu'une convergence n'est pas uniforme.

N.B. Rien n'a encore été vu sur la dérivation et l'intégration des suites et séries de fonctions.