mp* 2023-2024 : semaine 2 (25/09-29/09)

I Espaces vectoriels

I.1 Familles libres, familles génératrices, sous-espaces vectoriels

Espace vectoriel sur un corps $\mathbf{K}$ commutatif *Pour l'instant, rien n'ayant été fait sur les corps,* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ *ou à la rigueur* $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$ *dans les exercices. . .*
Espaces vectoriels à connaître : $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}[X]$, $A(X, E)$ où E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$.
Combinaisons linéaires ; notation $\mathbf{K}^{(I)}$.
Famille libre, famille liée, relation de dépendance linéaire.
Famille génératrice, base, famille des composantes d'un vecteur dans une base.
Sous-espace engendré par une famille de vecteurs.
On a le droit d'utiliser le fait qu'une famille de polynômes de degrés 2 à 2 distincts est libre.
Sous-espace vectoriel.
Une intersection quelconque de sous-espaces est un sous-espace.
Sous-espace engendré par une partie d'un espace vectoriel.

I.2 Somme de sous-espaces vectoriels

Somme d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.
Somme directe de deux sev, somme directe de p sev (caractérisations à connaître).
Sous-espaces supplémentaires.
Le sev des multiples de P, où P est un polynôme de degré $n + 1$, et $\mathbf{K}_n[X]$, sont supplémentaires dans $\mathbf{K}[X]$(*).
Base adaptée à une somme directe égal à l'espace entier.

I.3 Espaces de dimension finie

Pas de question sur la théorie des espaces de dimension finie.
Théorème de la base incomplète : dans un espace de dimension finie, toute famille libre peut être complétée en une base, on peut même s'astreindre à prendre les vecteurs qui complètent dans une famille génératrice fixée.
Les bases d'un espace de dimension n ont toutes même nombre n de vecteurs ;
une famille libre a au plus n vecteurs, elle en a n si et seulement si c'est une base ;
une famille génératrice a au moins n vecteurs, elle en a n si et seulement si c'est une base.
Dimension d'une somme directe de sous-espaces qui sont tous de dimension finie.
Formule de Grassmann(*).

I.4 Espace vectoriel produit

Espace vectoriel produit, base de $E \times F$ si on connaît une base de E et une base de F.

I.5 Applications linéaires

Applications linéaires, endomorphismes, isomorphismes, automorphismes.
Groupe linéaire.
Structures d'espace vectoriel sur $\mathcal{L}(E, F)$; structure d'anneau sur $\mathcal{L}(E)$.
Relations $u \circ (\lambda v + \mu v') = \lambda u \circ v + \mu u \circ v'$, $v \circ (\lambda u + \mu u') = \lambda v \circ u + \mu v \circ u'$.
Définition d'une application linéaire à partir des images des vecteurs d'une base.
Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.
Une application linéaire est un isomorphisme si et seulement si elle transforme base en base.
Image, caractérisation de la surjectivité.
Noyau, caractérisation de l'injectivité.
Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire $u(x) = b$, $u \in L(E, F)$, $b \in F$.
Rang d'une application linéaire. Il ne change pas si on compose à droite ou à gauche par un isomorphisme.
Une application linéaire induit un isomorphisme entre un supplémentaire quelconque de son noyau et son image(*) ; corollaire : théorème du rang.
Un endomorphisme en dimension finie (plus généralement, une application linéaire entre deux espaces de même dimension) est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.

I.6 Projections et symétries

Projection sur F parallèlement à G et sur G parallèlement à F si $F \oplus G = E$.
Si $p \in L(E)$ vérifie $p^2 = p$, alors $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$(*) et p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.
Projecteurs associés à une décomposition en somme directe $F_1 \oplus \cdots \oplus F_q = E$.
Symétrie par rapport à F parallèlement à G, définition à partir de la projection sur F parallèlement à G.
Si s est une involution linéaire ($s \in L(E)$, $s^2 = \mathrm{Id}$) alors $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}) = E$ et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$.

II AL2 : Matrices

II.1 Opérations

Produit matriciel AB, en particulier interprété comme le produit par A des colonnes de B.
Structures sur les ensembles de matrices : espace vectoriel $(M_{n,p}(\mathbf{K}), +, .)$, anneau (non intègre) $(M_n(\mathbf{K}), +, \times)$, groupe(non commutatif) $(GL_n(\mathbf{K}), \times)$.
Produit par blocs.
Base canonique, table de multiplication des matrices de cette base.

II.2 Matrices et applications linéaires

Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases, matrice d'un endomorphisme relativement à une base.
Des choix de bases permettent de définir un isomorphismes d'espaces vectoriels entre $L(E, F)$ et $M_{n,p}(\mathbf{K})$, entre $L(E)$ et $M_n(\mathbf{K})$.
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Isomorphisme d'algèbres entre $L(E)$ et $M_n(\mathbf{K})$.
Calcul matriciel de l'image d'un vecteur par une application linéaire $(Y = AX)$.
Application linéaire canoniquement associée à une matrice, endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée.
Image, noyau d'une matrice.
Inversibilité d'une matrice carrée : l'inversibilité à droite ou à gauche suffit.

II.3 Matrices remarquables

Matrices diagonales, triangulaires supérieures ou inférieures : dimensions de ces sous-espaces.
Transposition, transposée d'un produit, transposée de l'inverse.
Matrices symétriques et antisymétriques.

II.4 Changement de base

Matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base, matrice de passage d'une base à une base.
Formules de changement de base(s) : pour la matrice d'un vecteur, pour la matrice d'une application linéaire, pour la matrice d'un endomorphisme.