mp* 2023-2024 : semaine 1 (18/09-22/09)

I S1 : Suites numériques

I.1 Préliminaires

Définition d'une relation d'ordre ;
Définition d'un ordre total.
Toute partie non vide de $\mathbf{N}$ a un ppe, toute partie finie de $\mathbf{N}$ a un pge.
Une partie non vide majorée de $\mathbf{R}$ admet un plus petit majorant, appelé borne supérieure.
Caractérisation des intervalles de $\mathbf{R}$ par leur convexité.
Partie entière.

I.2 Suites de nombres réels ou complexes

Ecriture d'une limite finie ou infinie « avec les ϵ ».
Toute suite convergente est bornée.
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient de suites convergentes.
« Passage » des inégalités larges à la limite.
Théorème d'encadrement, dit « des gendarmes ».
Une suite monotone bornée de réels converge.
Théorème des suites adjacentes.
Théorème des segments emboîtés.
Principe d'étude d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f « simple » (il faut être capable de faire un dessin lisible représentant graphiquement la situation quand on peut tracer le graphe de f).

II S2 : Séries numériques

II.1 Séries de nombres réels ou complexes

Sommes partielles ; convergence, divergence, somme d'une série convergente.
Condition nécessaire de convergence, divergence grossière.
Principe de calcul d'une somme géométrique. Il faut savoir factoriser des sommes du type $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} f(k\alpha + \beta)$ où $f = \cos$, $f = \sin$ ou $f\ :\ t \longmapsto e^{it}$.
Séries géométriques (convergence et somme).
Si $|q| < 1$, il faut savoir écrire sans erreur et rapidement les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ et $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} aq^k$.
Restes d'une série convergente, définition à partir des sommes partielles et écriture comme somme d'une série ; la suite des restes d'une série convergente converge vers 0.
Théorème des séries alternées (sans oublier la majoration du reste...). Connaître l'idée de la démonstration : l'adjacence des deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}).
Si $\sum u_n$ vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées, alors R_n a même signe que u_{n+1} et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ a même signe que u_0(*).
Convergence absolue ; elle implique la convergence (il est inutile de s'attarder sur la preuve).

II.2 Séries de réels positifs

Critère de convergence : la série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.
Comparaison de sommes et d'intégrales :
Si f est continue par morceaux décroissante sur $[0, +\infty[$, il faut savoir encadrer une somme $\displaystyle\sum_{p}^{q} f(k)$ $(1 \leq p \leq q)$ par deux intégrales $\int_?^? f$ (quitte à ce qu'il reste parfois un $f(p)$).
Et il faut savoir encadrer une intégrale $\int_p^q f$ $(0 \leq p \leq q)$ par deux sommes $\sum_{k=?}^{?} f(k)$.
Définition de l'intégrabilité sur $[a, +\infty[$ d'une fonction positive continue par morceaux (à l'aide de $\displaystyle\int_a^x f$).
Si f est positive décroissante C^0 par morceaux sur $[a, +\infty[$, $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable.
Application au critère de convergence des séries de Riemann.

II.3 Détermination de la nature d'une série par comparaison à une série à termes réels positifs

...par utilisation de o, de O ou de $\sim$.

II.4 Critère de d'Alembert

Attention à ne l'utiliser que pour des séries à termes réels strictement positifs.

II.5 Correspondance suites/séries

La série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ a même nature (convergence, divergence) que la suite (u_n).

II.6 Séries de Bertrand

Le résultat, hors programme, n'est pas à savoir par coeur, mais il faut connaître les techniques qui permettent d'étudier une série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

III C1 : Relations de comparaison entre suites numériques

Définitions et écritures des relations o, $\mathcal{O}$, $\sim$ pour les suites. Dans le cadre du programme, la suite à laquelle on compare ne s'annule pas, au moins à partir d'un certain rang.
A part les définitions, il faut surtout savoir passer de $u_n \sim v_n$ à $u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n)$ et de $u_n \to \ell$ à $u_n = \ell + \mathrm{o}(1)$.
Comparaison des suites « de référence » $\big((\ln n)^\alpha\big)$, $\big(n^\beta\big)$, $\big(k^n\big)$.
Il est souhaitable de savoir classer aussi $(n!)$, (n^n)).

IV C2 : étude asymptotique de suites

Exemples d'utilisation de développements limités pour obtenir des développements « asymptotiques ». Aucune théorie des développements asymptotiques n'est au programme.
Les développements limités que le programme exige sont au voisinage de 0 ceux de
exp, sin, cos, sh, ch, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $x \mapsto 1/(1-x)$, $x \mapsto 1/(1+x)$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \ln(1-x)$.
Et tan, seulement à l'ordre 3.