mp* 2022-2023 : semaine 7 (21/11-25/11)

I S5 : régularité des suites et séries de fonctions

Permutation d'une limite et d'une intégrale sur un segment, ou d'une intégrale sur un segment et d'une somme de série, dans le cas de convergence uniforme sur ce segment(*).
Si (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers une fonction f, si $a \in I$, la suite (F_n) des primitives des f_n qui s'annulent en a converge, uniformément sur tout segment inclus dans I, vers la primitive de f qui s'annule en a. Enoncé analogue sur les séries de fonctions.
Suites de fonctions de classe C^1 : si une suite (f_n) de fonctions de classe C^1 converge simplement sur un intervalle I, si la suite (f_n') converge uniformément sur tout segment inclus dans I, alors $f = \lim(f_n)$ est de classe C^1 sur I, et $f' = \lim(f_n')$.
Enoncé analogue sur les séries de fonctions.
Suites de fonctions de classe C^k : il suffit de la convergence uniforme sur tout segment de la suite des dérivées k-ièmes, et de la convergence simple des précédentes.
Séries de fonctions de classe C^k.
Suites et séries de fonctions de classe C^∞.
Exemple à bien connaître : savoir démontrer que ζ est C^1, et même C^∞(*). Il est souhaitable aussi de bien comprendre la dérivation de la fonction « ζ alternée ».

II S6 : Séries entières

Lemme d'Abel, définition du rayon de convergence(*).
Comparaison des rayons de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sous les hypothèses $a_n = O(b_n)$, $a_n \sim b_n$.
Parenthèse : produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes (démonstration non vue, on en reparlera avec la sommabilité).
Somme, produit de Cauchy de deux séries entières : résultats sur les rayons de convergence et sur les sommes.
Rayon de convergence de la série dérivée d'une série entière(*).
Dorénavant, on ne considère que des séries entières d'une variable réelle.
Convergence normale sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.
On insiste sur le fait qu'il n'y a en général pas convergence uniforme sur l'intervalle ouvert $]-R,R[$.
La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur $]-R,R[$, les dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme.
Une primitive de la somme de la série entière sur $]-R,R[$ s'obtient par primitivation terme à terme.
Fonction développable en série entière.
Définition de la série de Taylor d'une fonction de classe C^∞ ; si une fonction est développable en série entière, ce développement est unique, c'est la série de Taylor.
Critère de développabilité en série entière : le reste dans la formule de Taylor tend vers 0 pour tout $x \in]-r,r[$.
Développement usuels : exp (variable complexe) ; cos, sin, ch, sh, $(1+x)^\alpha$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, Arctan$x$ (variable réelle).
Exemples de recherche d'une solution DSE pour une équation différentielle.
Théorème d'Abel « radial » : si le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est $R \in \mathbf{R}_*^+$, si $\sum a_n R^n$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x\to R,\ x<R]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ (preuve non exigible, résultat nouveau dans le programme).

III C4 : Intégration sur un segment (fonctions numériques)

Bref rappel sur la définition de l'intégrale, rien n'est exigible sur la construction de l'intégrale.

Intégrale d'une fonction en escalier, d'une fonction continue par morceaux.
Linéarité, positivité, $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.
Sommes de Riemann (pour des subdivisions de pas constant).

IV C5 : Dérivation et intégration

Ici aussi, on considère des fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur un intervalle.
Théorème fondamental du calcul différentiel : si f est continue sur l'intervalle I, a un point de I, alors $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
Dérivation de $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ en utilisant une primitive de f(*).
Intégration par parties, changement de variable dans une intégrale sur un segment.
Inégalité des accroissements finis.
Formule de Taylor avec reste sous forme intégrale, inégalité de Taylor-Lagrange.