# mp* 2021-2022 : semaine 9 (06/12 - 10/12)

# I C8 : Intégrales dépendant d'un paramètre

*Les fonctions sont à valeurs réelles ou complexes.*

Théorème de convergence dominée pour une suite $\left(\int_I f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$.

Théorème de continuité d'une fonction

$$x \to \int_I f(x,t)\ dt$$

($x$ est une variable réelle décrivant une partie $A$ de $\mathbf{R}$) avec domination, éventuellement sur tout segment inclus dans $A$ lorsque $A$ est un intervalle, ce qui est toujours le cas dans la pratique.

Classe $C^1$, dérivation sous le signe $\int$ des fonctions

$$x \to \int_I f(x,t)\ dt$$

Extension à la classe $C^k$.

Application de ces techniques à l'étude de la fonction $\Gamma$ (savoir refaire, pas de résultats à retenir par cœur).

**Nouveau :** Un théorème d'interversion série/intégrale :

Si $\sum f_n$ converge simplement sur $I$, si les $f_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sont continues par morceaux sur $I$, si chaque $f_n$ est intégrable sur $I$ et si enfin (hypothèse majeure) $\sum_{n\geq 0}\int_I |f_n|$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur $I$, $\sum_{n\geq 0}\int_I f_n$ converge, et « on peut permuter ».

# II Sommabilité

*Pas de démonstration de cours exigible dans ce chapitre.*

## II.1 Dénombrabilité

Si $A_1,\dots,A_p$ sont finis ou dénombrables, $A_1\times\cdots\times A_p$ l'est.

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.

Non dénombrabilité de $\mathbf{R}$ : procédé diagonal de Cantor (hors programme mais trop intéressant pour être ignoré).

## II.2 Famille dénombrable de réels positifs

Définition de la sommabilité de $(a_i)_{i\in I}$, $I$ dénombrable, les $a_i$ positifs. Cas $I=\mathbf{N}$.

Théorème de **sommabilité et sommation** par paquets : Si $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une « pseudo-partition » de $I$ (des $I_n$ peuvent être $\emptyset$), $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si

(i) Pour tout $n$, $(a_i)_{i\in I_n}$ est sommable.

et (ii) La série $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i\in I_n} a_i\right)$ converge.

Lorsque c'est le cas :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} a_i\right)$$

Théorème de commutativité, que l'on peut formuler comme un théorème de « réindexation ».

## II.3 Famille dénombrable de réels ou de complexes

Sommabilité, somme.

Théorème de **sommation** par paquets d'une famille dont on sait déjà qu'elle est sommable.

Commutativité.

## II.4 Exemple : « suites doubles » de réels ou complexes

Sommabilité et somme des « suites doubles » de nombres réels ou complexes, interversion des sommations (« théorème de Fubini », même s'il ne porte pas de nom dans le programme).

Il faut savoir étudier la sommabilité et sommer par paquets dans les trois cas usuels : paquets indexés par $\{m\}\times\mathbf{N}$, paquets indexés par $\mathbf{N}\times\{n\}$, paquets indexés par $\{(p,q)\ ;\ p+q=n\}$.

Cas particulier des suites doubles produits, application au produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

# III DTL du lundi 6 décembre

Surtout C7, C8 et C9. S3, S4, S5, S6, S7. Toute l'Analyse, en fait. Connaître les théorèmes et avoir revu les exercices faits en cours, c'est beaucoup, mais c'est assez.