mp* 2021-2022 : semaine 8 (29/11 - 03/12)

I C7 : Intégrale sur un intervalle quelconque

Les fonctions sont à valeurs réelles ou complexes.
Convergence d'une intégrale généralisée.
Intégrabilité d'une fonction, i.e. « absolue convergence » de son intégrale. Elle implique la convergence.
Intégrales de Riemann sur divers intervalles, détermination de l'intégrabilité par comparaison.
Intégrale généralisée convergente non absolument convergente : exemple typique de $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ sur $]0, +\infty[$.
Utilisation de l'intégration par parties (avec précautions) et du changement de variable (qui est légitime dès lors qu'il s'agit d'une bijection de classe C^1). Le programme autorise les changements de variables affines, puissances, logarithmes, exponentielles sans justification, mais il vaut mieux justifier le changement de variable dès lors qu'il n'est pas affine.
Le changement de variable peut permettre de démontrer l'existence d'une intégrale car il ne change pas sa nature.

II C8 : Intégrales dépendant d'un paramètre

Les fonctions sont à valeurs réelles ou complexes.
Théorème de convergence dominée pour une suite $\left(\displaystyle\int_I f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$.
Théorème de continuité d'une fonction

$$x \to \int_I f(x,t)\ dt$$

(x est une variable réelle décrivant une partie A de $\mathbf{R}$) avec domination, éventuellement sur tout segment inclus dans A lorsque A est un intervalle, ce qui est toujours le cas dans la pratique.
Classe C^1, dérivation sous le signe $\int$ des fonctions

$$x \to \int_I f(x,t)\ dt$$

Extension à la classe C^k.
Application de ces techniques à l'étude de la fonction Γ(*) (savoir refaire, pas de résultats à retenir par cœur).