mp* 2020-2021 : semaine 10 (14/12 - 18/12)

I Sommabilité

Révisions. . .

II P1-P2 : Espaces probabilisés

II.1 Espace probabilisable

Définition d'une tribu sur un ensemble Ω. Propriétés de stabilité (par complémentaire, intersection finie ou dénombrable, union finie ou dénombrable).
L'étude des tribus n'est pas, comme on dit, un objectif du programme.

II.2 Probabilités

Définition d'une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.
Cas d'un ensemble fini ou dénombrable : les probabilités des événements élémentaires déterminent alors la probabilité.
Croissance.
Probabilité d'une réunion de deux événements.
Probabilité d'une réunion croissante : « continuité croissante ».
Corollaire : $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right)$.
Réunion quelconque : majoration de la probabilité de la réunion.
Probabilité d'une intersection décroissante (« continuité décroissante »).
Événements presque sûrs, événements négligeables.

II.3 Conditionnement, indépendance

Probabilité d'un évènement A sachant un évènement B ($P(B) > 0$). P_B est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
Formule des probabilités composées.
Formule des probabilités totales.
Formule de Bayes (probabilité des causes).
Evénements mutuellement indépendants. Stabilité par passage au complémentaire.

III P3 : Variables aléatoires discrètes

III.1 Définitions

Définition d'une variables aléatoire discrète.
Une fonction d'une variable aléatoire discrète (il s'agit donc en fait d'une composition : $f(X)$ note $f \circ X$) est une variable aléatoire discrète.
Loi d'une v.a. discrète.

III.2 Loi géométrique

Sur $\mathbf{N}_*$: $\mathbf{P}(X = n) = q^{n-1}p$.
Simplicité de l'expression de $P(X > n)$, $n \in \mathbf{N}$.

III.3 Lois finies usuelles

Loi uniforme sur un ensemble fini.
Loi de Bernoulli. Exemple : l'indicatrice d'un évènement est une variable de Bernoulli.
Loi binomiale.

III.4 Couple de variables aléatoires indépendantes

Loi de Y sachant $X = x$ si $\mathbf{P}(X = x) \neq 0$.
Autres exemples de lois conditionnelles.
Couple de v.a. indépendantes, différentes caractérisations.
Si X et Y sont indépendantes, $f(X)$ et $g(Y)$ le sont.

III.5 Amnésie de la loi géométrique

Les lois géométriques sont les uniques lois sur $\mathbf{N}_*$ vérifiant pour tous n, k :

$$\mathbf{P}(X > n + k | X > n) = \mathbf{P}(X > k)$$

IV P4 : Espérance, moments (variables aléatoires réelles discrètes)

IV.1 Espérance, transfert

Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle, définie par

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x)x$$

lorsque la famille est sommable. Si la famille n'est pas sommable et si la variable est à valeurs positives, on définit $\mathbf{E}(X) = +\infty$. Si la famille n'est pas sommable et si la variable n'est pas positive, on dit qu'elle n'a pas d'espérance.
Espérance d'une loi géométrique(*).
Transfert : si X est une v.a. discrète à valeurs réelles, si f est une fonction, $f(X)$ a une espérance si et seulement si la famille $(\mathbf{P}(X = x)\ f(x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable, et dans ce cas $\mathbf{E}\left(f(X)\right) = \ldots.$
On retrouve, dans le cas d'un univers dénombrable ou fini, la définition de l'espérance vue en mpsi.

IV.2 Propriétés

Si $|X| \leq Y$, si Y a une espérance, X a une espérance.
Positivité de l'espérance.
Linéarité de l'espérance.

IV.3 Moments, variance

Moments d'une variable aléatoire réelle discrète.
Si une v.a.r.d. a un moment d'ordre 2, elle est d'espérance finie.
Inégalité de Cauchy-Schwarz(*).
Espace vectoriel des v.a.r.d ayant un moment d'ordre 2.
Variance, écart-type.
Formules : $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2$, $\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X)$(*).
Variable centrée réduite.
Variance d'une loi géométrique(*).